Herz. Bibliothek.

20801.

E. I. 4.

~~74~~ 81

[illegible]

Lehrbuch

der

Geometrie

von

F. Wolff.

Dritter Theil.

Analytische Geometrie.

Zweite Auflage.

H. S. C. BIBLIOTHEK COBURG

Mit neun lithographirten Tafeln.

Berlin.
Verlag von Wilhelm Logier.
1845.

Vorwort.

Dem Vortrage der analytischen Geometrie kann ich nur wenige Wochen einräumen; ich muß mich also darauf beschränken, das dem Techniker unentbehrlichste Material vorzuführen, und Prinzipien zu entwickeln, welche in den Stand setzen, in anderen Fällen Eigenschaften und Gesetze selbstständig abzuleiten.

Der dritte Abschnitt, analytische Elemente der Linien im körperlichen Raume und der Flächen enthaltend, ist dieser Ausgabe neu hinzugefügt. Die Kenntniß derselben ist unerläßlich für das Studium der höheren Mechanik.

Ein weiteres Eingehen auf besondere Linien und Flächen habe ich einem Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung und andererseits der neuen Ausgabe der beschreibenden Geometrie vorbehalten. In beiden wird sich über Hilfsmittel gebieten lassen, die ich hier nicht voraussetzen durfte.

Seite 226 Zeile 18 und Seite 227 Zeile 4 ist auf das sechste Kapitel verwiesen, während das fünfte gemeint ist. Die Verbesserung sonstiger, hoffentlich nicht erheblichen Druckfehler, stelle ich der Geneigtheit des Lesers anheim.

Berlin am 25. Mai 1845.

W o l f f.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Seite

Einleitung 1

Erstes Kapitel.

Von der Linie des ersten Grades 10

Zweites Kapitel.

Von dem Verlegen der Coordinatenachsen 54

Drittes Kapitel.

Vom Kreise 61

Viertes Kapitel.

Von den Linien des zweiten Grades 69

I. Von der Parabel 69

II. Von der Ellipse 94

III. Von der Hyperbel 126

IV. Von der Linie des zweiten Grades im Allgemeinen . . 147

Zweiter Abschnitt.

Fünftes Kapitel.

Von den Curven einfacher Krümmung im Allgemeinen . . . 177

Tangente, Normale 178

Quadratur, Rectification 186

Osculation 196

Evolvente und Evolute 204

Seite

Sechstes Kapitel.

Polar-Coordinaten 208

Siebentes Kapitel.

Von einigen besonderen Curven 212
I. Cykloide 212
II. Epicykloide 219
III. Hypocykloide 223
IV. Kreisevolvente 226
V. Logarithmische Linie 229
VI. Archimedische Spirale (Spinnlinie, Neoide) 232
VII. Logarithmische Spirale 235
VIII. Conchoide 239
Ueber die Gestalt der Räderzähne 243

Dritter Abschnitt.

Achtes Kapitel.

Von der geraden Linie im körperlichen Raume, und von der Ebene. 251

Neuntes Kapitel.

Von den Linien doppelter Krümmung und von den krummen Flächen im Allgemeinen 267

Erster Abschnitt.

Einleitung.

§. 1.

Die gerade Linie Fig. 1 sei unendlich. Der Punkt A sei beliebig in der Linie angenommen. Die gerade Linie wird durch den Punkt in zwei Theile getheilt, deren jeder einerseits durch den Punkt A begränzt ist, und sich andererseits ins Unendliche erstreckt. Eine Verrückung des Punktes A ändert hierin nichts. Daher ist der absolute Ort des Punktes auf der geraden Linie vollkommen gleichgiltig; und die beiden Theile der geraden Linie unterscheiden sich in nichts von einander, wo auch der Punkt A in ihr angenommen sein mag.

Soll auf der geraden Linie ein zweiter Punkt B genommen werden, der von dem Punkt A um q bestimmte Einheiten entfernt ist, so kann dies sowohl auf dem einen, als auf dem anderen Theil der geraden Linie geschehen. Beide Fälle unterscheiden sich nicht, so lange man bloß die gerade Linie und die Punkte A und B beachtet.

Ein dritter Punkt C, welcher in der Entfernung q′ von A auf der geraden Linie genommen werden soll, erhält wieder dieselbe Lage gegen den Punkt A, gleichviel auf welchen Theil der geraden Linie man ihn setzt. Aber die Lage der Punkte B und C zu einander fällt verschieden aus, je nachdem der Punkt C auf dem Theil der Linie angenommen wird, auf welchem der Punkt B sich befindet, oder auf dem, der B nicht enthält. Im ersten Fall ist nämlich die Entfernung der Punkte B und C von einander gleich der Differenz zwischen den Entfernungen q und q′, im anderen gleich der Summe dieser Entfernungen. Aehnliche Unterschiede treten ein, wenn noch mehr Punkte in gegebenen Entfernungen von dem Punkt A auf der geraden Linie genommen werden sollen.

§. 2.

Auf der geraden Linie Fig. 1 sei wie vorher der Punkt A beliebig angenommen, und in der Entfernung q von A der

Punkt B. Soll ferner ein Punkt C auf der geraden Linie genommen werden in gegebener Entfernung von A, während nicht bloß die Lage des Punktes C gegen den Punkt A, sondern zugleich seine Lage gegen B in Betracht kommt, so läßt sich der Punkt C dadurch vollständig bestimmen, daß seine Entfernung von A durch die algebraische Summe $q \pm s$ ausgedrückt wird, in welcher q die erwähnte Entfernung AB bezeichnet. — Wenn die Entfernung AC durch $q + s$ ausgedrückt ist, fällt sogleich in die Augen, wie der Punkt C sich ergiebt. Der Fall, daß die Entfernung AC durch $q - s$ vorgestellt ist, veranlaßt eine nähere Betrachtung:

Setzen wir voraus, es sei $q - s = + q'$, so stehen zwei Wege auf, zu dem Punkte C zu gelangen. Man erhält nämlich C einmal, indem man von B um s Einheiten zurückgeht (nach A hin), dann auch, indem man von A aus q' Einheiten nach B hin aufträgt.

Setzen wir voraus, es sei $q - s = - q'$, so gelangen wir einmal zu dem Punkt C, indem wir, analog dem Vorigen, von B aus um s Einheiten zurückgehen (nach A hin), und wir kommen dabei um q' Einheiten über den Punkt A hinaus. Zu demselben Punkt gelangen wir aber zweitens, wenn wir sogleich auf dem Theil der geraden Linie, der den Punkt B nicht enthält, q' Einheiten von A aus auftragen.

Wir haben hiernach den Punkt C auf den Theil der Linie zu setzen, welcher den Punkt B enthält, oder auf den, welcher B nicht enthält, je nachdem die algebraische Summe $q \pm s$ einen positiven oder einen negativen Werth $\pm q'$ hat. Und während q' die Entfernung der Punkte A und C ist, wird s die der Punkte B und C sein, so daß die Lage der drei Punkte eine vollkommen bestimmte ist. Hierdurch rechtfertigt sich die oben ausgesprochene Behauptung.

Wir können jetzt von der algebraischen Summe abstrahiren, und die Lage des Punktes C durch seine positive oder negative Entfernung $\pm q'$ von A feststellen, dieselbe Bestimmung auch auf beliebig viele Punkte ausdehnen.

§. 3.

Sollen also auf einer unendlichen geraden Linie, auf welcher ein Punkt A gewählt ist, mehrere Punkte genommen werden in Entfernungen von dem Punkt A, die theils durch positive, theils durch negative Zahlen gegeben sind, so erhellet aus dem Bisherigen, daß man alle Punkte, deren Entfernungen von A positiv sind, auf einer Seite der geraden Linie, und zwar beliebig auf welcher, und alle Punkte, deren Entfer-

nungen von A negativ sind, dann auf der anderen Seite der geraden Linie zu nehmen hat. Und dadurch, daß die Entfernungen der Punkte von dem Punkt A in positiven und negativen Zahlen gegeben, und die Punkte, wie erwähnt, aufgetragen werden, ist nicht bloß die Lage derselben zu dem Punkt A, sondern auch ihre Lage zu einander bedingt und berücksichtigt.

Umgekehrt, liegen auf einer unendlichen geraden Linie beliebig viele Punkte, und will man die Lage derselben gegen irgend einen Punkt O der geraden Linie, und zugleich die Lage der Punkte zu einander bestimmen, so bestimme man die Entfernungen der Punkte von dem Punkt O, und setze die Entfernungen, welche zur einen Seite von O liegen, positiv, die aber, welche zur anderen liegen, negativ. Zu welcher Seite von O man die Entfernungen positiv setzt, ist gleichgiltig.

§. 4.

Für die folgenden Untersuchungen bedürfen wir fortdauernd einer unendlichen geraden Linie, in der wir einen Punkt O beliebig, dann aber noch andere Punkte annehmen, deren Lage wir durch ihre positiven oder negativen Entfernungen von dem Punkt O bestimmen. Wir nennen eine solche Linie eine Abscissenlinie oder Abscissenachse, den in ihr beliebig gewählten Punkt O den Anfangspunkt der Abscissen, und jede positive oder negative Entfernung eines Punktes der geraden Linie von dem Anfangspunkt die Abscisse dieses Punktes.

Wir werden in der Folge den Anfangspunkt der Abscissen mit O bezeichnen. Die rechts von dem Anfangspunkt O liegenden Abscissen werden wir positiv, also die links von O liegenden Abscissen negativ nehmen. Zur Bezeichnung von Abscissen ist es üblich, sich des Buchstab x zu bedienen.

§. 5. Aufgabe.

Es sei ein Punkt B durch seine Abscisse x für den Anfangspunkt O gegeben. Man soll B als Anfangspunkt nehmen, und die Abscisse des Punkts O für diesen Anfangspunkt B bestimmen.

Auflösung. Liegt B rechts von O, so liegt O links von B; und liegt B links von O, so liegt O rechts von B. Ueberhaupt also, um von B nach O zu gelangen, muß man sich in der Richtung bewegen, die der Richtung entgegengesetzt ist, in der man von O aus nach B geht. Daraus erhellet, daß, wenn x die positive oder negative Abscisse des Punktes B für den Anfangspunkt O ist, alsdann $-x$ die Abscisse des Punktes O ist für den Anfangspunkt B.

§. 6. Aufgabe.

Für den Anfangspunkt O sei ein Punkt B durch seine Abscisse x und ein Punkt C durch seine Abscisse x' gegeben. Man soll die Abscisse x'' des Punktes C für B als Anfangspunkt bestimmen.

Auflösung. Wenn man §. 2. beachtet, erhellet, daß $x + x'' = x'$ ist, und zwar in allen Fällen, wie sich leicht an der Figur nachweisen läßt. Daraus folgt

$$x'' = -x + x'$$

d. h. die Abscisse des Punktes C für den Anfangspunkt B wird erhalten, wenn man die Abscisse von B, für O als Anfangspunkt, entgegengesetzt nimmt, und sie dann zur Abscisse des Punktes C, für O als Anfangspunkt, addirt.

Diesen Paragraphen möge man besonders beachten.

§. 7. Aufgabe.

Es sind zwei Punkte B und C durch ihre Abscissen x und x' für den Anfangspunkt O gegeben; man soll die Entfernung der Punkte B und C bestimmen.

Auflösung. Man bestimme die Abscisse des einen der Punkte für den anderen als Anfangspunkt, und setze diese Abscisse absolut. Die Abscisse des Punktes B für C als Anfangspunkt ist z. B. $-x' + x$, und wenn man diese algebraische Summe numerisch berechnet, und das Resultat absolut nimmt, erhält man das Maaß der Länge BC.

§. 8. Aufgabe.

Es sind zwei Punkte B und C durch ihre Abscissen x und x' für den Anfangspunkt O gegeben. Man soll auf der Abscissenlinie einen Punkt D bestimmen, so, daß sich verhält

$$BD : CD = p : q.$$

Auflösung. Es kommt darauf an, die Abscisse x'' des Punktes D zu ermitteln. Im Allgemeinen lassen sich zwei Punkte auf der Abscissenlinie angeben, welche der Aufgabe entsprechen, nämlich ein Punkt D, zwischen den Punkten B und C liegend, und ein Punkt D', der nicht zwischen B und C liegt. Wir bestimmen zunächst die Abscisse x'' des zwischen den Punkten B und C liegenden Punktes D. Das Stück BD werde angesehen als Abscisse des Punktes D für B als Anfangspunkt. Dann ist $BD = -x + x''$. DC werde angesehen als Abscisse des Punktes C für den Anfangspunkt D. Dann ist $DC = -x'' + x'$. Befindet sich nun D zwischen B und C, so haben, wie auch die Punkte B und C liegen mögen, die eben genann-

ten Abscissen BD und DC einerlei Lage, sind also entweder beide positiv oder beide negativ. Zur Bestimmung von x'' ergiebt sich also die Proportion

$$-x+x'':-x''+x' = p:q$$

und hieraus folgt

$$1)\quad x'' = \frac{px'+qx}{p+q}.$$

Wir gehen zur Bestimmung des anderen Punktes D′ über, der nicht zwischen B und C liegt. Seine Abscisse bezeichne $x_{,,}$. Der Punkt D′ liegt entweder dergestalt, daß C zwischen B und D′ sich befindet, oder so, daß B zwischen C und D′ liegt. In beiden Fällen, und wie auch die Lage der Punkte B und D′ sein mag, haben die Abscissen des Punktes D′ für B und C als Anfangspunkte einerlei Vorzeichen. Sie drücken sich aus durch $-x+x_{,,}$ und $-x'+x_{,,}$; und man hat die Proportion

$$-x+x_{,,}:-x'+x_{,,} = p:q.$$

Aus ihr folgt

$$2)\quad x_{,,} = \frac{px'-qx}{p-q}.$$

Denkt man die Punkte D und D′ aufgetragen, so hat man die harmonische Proportion

$$BD:CD = BD':CD'.$$

§. 9. Aufgabe.

Es sind zwei Punkte B und C durch ihre Abscissen x und x' gegeben. Man soll die Abscisse x'' der Mitte D von BC bestimmen.

Auflösung. Man setze im §. 8. 1) $p = q = 1$ und es entsteht

$$x'' = \frac{x+x'}{2}$$

§. 10.

Durch irgend einen Punkt B der Abscissenlinie, Fig. 2, werde eine unendliche gerade Linie BC gedacht, welche unter einem Winkel φ gegen die Abscissenlinie geneigt ist. Die Linie BC betrachte man durch den Punkt B eben so in zwei Theile getheilt, wie die Abscissenlinie es ist durch den Punkt O. Die Lage beliebiger Punkte C, D .... auf der Linie BC gegen den Punkt B, und unter einander, kann dann durch ihre positiven

oder negativen Entfernungen von dem Punkte B bestimmt werden. Eine solche Linie BC nennen wir eine Ordinatenlinie und die positiven oder negativen Entfernungen beliebiger Punkte C, D.... dieser Linie von dem Durchschnittspunkt B derselben mit der Abscissenlinie werden die Ordinaten der Punkte genannt. Die oberhalb liegenden Ordinaten werden wir jedesmal positiv, also die unterhalb liegenden negativ nehmen. Zur Bezeichnung von Ordinaten bedient man sich des Buchstab y.

Man stelle sich eine Ebene E vor, und in derselben die Abscissenlinie OB, Fig. 2. Die Lage eines beliebigen in der Ebene E liegenden Punktes C gegen den Punkt O kann bestimmt werden, indem man durch C eine Ordinatenlinie BC legt, und die Abscisse OB, die Ordinate BC, und den Winkel φ angiebt, unter welchem die Ordinatenlinie gegen die Abscissenlinie geneigt ist. Und ist in solcher Weise die Lage eines Punktes C gegen den Punkt O bestimmt, so nennt man das Stück OB die Abscisse, das Stück BC die Ordinate des Punktes C, beide Stücke OB und BC seine Coordinaten, den Winkel φ den Coordinatenwinkel, den Punkt O den Anfangspunkt der Coordinaten.

Beliebig viele Punkte in der Ebene E, von welchen die Lage eines jeden gegen den Punkt O durch seine positiven oder negativen Coordinaten bestimmt ist, sind zugleich in ihrer Lage zu einander gegeben.

Wenn man die Lage mehrerer Punkte durch ihre Coordinaten bestimmt, nimmt man die sämmtlichen Ordinatenlinien parallel an. Die durch den Anfangspunkt O gehende Ordinatenlinie heißt noch besonders die Ordinatenachse. Wir werden ferner der Kürze wegen die Abscissenachse auch die erste Achse, die Ordinatenachse die zweite Achse nennen. Beide Achsen heißen Coordinatenachsen.

Die Coordinatenachsen, Fig. 3, theilen die Ebene in vier Theile. Jeder in dem Theil XOY liegende Punkt hat eine positive Abscisse und eine positive Ordinate, alle in dem Theil XOY′ befindlichen Punkte haben positive Abscissen und negative Ordinaten, alle in X′OY liegenden Punkte haben negative Abscissen und positive Ordinaten, und alle in dem Theil X′OY′ befindlichen Punkte haben sowohl die Abscissen als die Ordinaten negativ.

Die Lage eines Punktes C, Fig. 3, kann auch dadurch festgestellt werden, daß man von ihm aus die Linien CN und CM beziehlich parallel mit der ersten und zweiten Achse zieht, und die Stücke CN = x und CM = y giebt. Durch diese

Stücke hat man nämlich die Coordinate OM und MC. Es fällt in die Augen, daß man zu dem Punkte C auch gelangt, indem man zuerst auf der Ordinatenachse das Stück ON = y nimmt, durch N eine Abscissenlinie NC parallel der Abscissenachse legt, und auf jene die Abscisse NC = x trägt.

§. 11.

Für jede Ordinatenlinie gelten dieselben Gesetze, welche für die Abscissenlinie hergeleitet worden sind, oder noch werden entwickelt werden.

Ist z. B. auf einer Ordinatenlinie ein Punkt C durch seine Ordinate y, und ein zweiter Punkt D durch seine Ordinate y' gegeben, und verlangt man die Ordinate y'' des Punktes, welcher in der Mitte von CD liegt, so ist nach §. 9.

$$y'' = \frac{y + y'}{2}.$$

§. 12. Aufgabe.

Es sind Fig. 4 zwei Punkte A und B durch ihre Coordinaten x und y, und x' und y' für die Coordinatenachsen OX und OY gegeben. Durch den Punkt A denke man neue Coordinatenachsen, parallel mit den ersteren, nämlich AX' parallel mit OX und AY' parallel mit OY. Man soll für diese neuen Coordinatenachsen die Coordinaten x'' und y'' des Punktes B bestimmen.

Auflösung. Wie auch die Punkte A und B liegen mögen, es ist immer die Abscisse x'' gleich der Abscisse des Punktes D für C als Anfangspunkt, also nach §. 6. $= -x + x'$, und die Ordinate y'' gleich der Ordinate des Punktes B für E als Anfangspunkt, also nach §. 11. gleich $-y + y'$. Daher ist ganz allgemein

$$x'' = -x + x'$$
$$y'' = -y + y'.$$

Hieraus folgt weiter

$$x' = x + x''$$
$$y' = y + y''.$$

§. 13. Aufgabe.

Es ist Fig. 4 ein Punkt A durch seine Coordinaten x und y gegeben. Man soll die Entfernung des Punktes A von dem Anfangspunkt O der Coordinaten, d. h. die Linie OA bestimmen.

Auflösung. Es erhellet ohne Weiteres aus der Figur, daß

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi}$$

und man wird sich leicht überzeugen, daß dieser Ausdruck ungeändert bleibt, welche Vorzeichen auch die Coordinaten x und y erhalten mögen. Die Wurzel ist absolut zu nehmen, es sei denn, daß man die Linie OA unendlich denke, und die Lage des Stückes OA gegen O oder A in Betrachtung ziehe.

Ist der Coordinatenwinkel φ ein rechter Winkel, so ist

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

§. 14. Aufgabe.

Es sind Fig. 4 zwei Punte A und B durch ihre Coordinaten x und y, und x' und y' gegeben. Man soll die Entfernung der Punkte A und B bestimmen.

Auflösung. Man denke durch einen der Punkte, etwa A, Coordinatenachsen, parallel mit den gegebenen. Für diese neuen Coordinatenachsen und den Punkt A als Anfangspunkt sind die Coordinaten des Punktes B (nach §. 12.) gleich $-x + x'$ und $-y + y'$; und dann ist unmittelbar nach dem vorigen Paragraph

$$AB = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\varphi}$$

oder, was dasselbe ist,

$$AB = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(x-x')(y-y')\cos\varphi}$$

Und bei rechtwinkligen Coordinaten ist

$$AB = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

$$= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

§. 15. Aufgabe.

Es sind Fig. 5 zwei Punkte A und B durch ihre Coordinaten x' und y' und x'' und y'' gegeben. Man soll die Coordinaten x und y eines Punktes C finden, welcher mit den Punkten A und B in einer geraden Linie liegt.

Auflösung. Die Aufgabe ist unbestimmt, weil sich unendlich viele Punkte angeben lassen, welche in der unendlichen geraden Linie AB sich befinden. Es sei C irgend ein Punkt der Linie AB, und seine Coordinaten seien x und y. Man ziehe AE parallel der Abscissenachse. Dann verhält sich

$$AD : DC = AE : EB.$$

Und umgekehrt, wenn diese Proportion Statt findet, liegt der Punkt C in der geraden Linie AB. Die Glieder der Proportion drücken sich aber ganz allgemein aus durch $x - x'$, $y - y'$, $x'' - x'$, $y'' - y'$. Die Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten x und y erfüllen müssen, ist demnach

$$x - x' : y - y' = x'' - x' : y'' - y'.$$

Hieraus folgt 1) $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$

oder

$$2) \quad y = \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'} + \frac{y'' - y'}{x'' - x'} x.$$

Vermittelst dieser Gleichung lassen sich unendlich viele Punkte angeben, die in der unendlichen geraden Linie AB liegen. Denn wenn man statt x irgend einen bestimmten Abscissenwerth setzt, so liefert die Gleichung den Ordinatenwerth y, welcher mit jener Abscisse einen Punkt giebt, der sich in der Linie AB befindet.

§. 16. Aufgabe.

Es sind Fig. 5 zwei Punkte A und B gegeben durch ihre Coordinaten x' und y', und x'' und y''. Man soll die Coordinaten x und y eines Punktes C finden, der in der geraden Linie AB liegt, und so, daß sich verhält $AC : BC = p : q$.

Auflösung. Der Punkt C kann zwischen A und B liegen oder nicht. Er werde zunächst zwischen A und B angenommen. AE sei parallel der Abscissenachse. Es verhält sich dann auch $AD : ED = p : q$. Und es folgt nach §. 8., daß

$$x = \frac{px'' + qx'}{p + q}$$

ist. Setzt man diesen Werth in die letzte Gleichung des vorigen Paragraphen, so entsteht

$$y = \frac{py'' + qy'}{p + q}.$$

Dieses Resultat hätte sich auch unmittelbar nach §. 11. und §. 8. angeben lassen.

Für den Punkt C', der nicht zwischen A und B liegt, ergiebt sich in derselben Weise

$$x = \frac{px'' - qx'}{p - q}$$

$$y = \frac{py'' - qy'}{p - q}.$$

Die Stücke AC, BC, AC' und BC' bilden eine harmonische Proportion.

§. 17. Zusatz.

Und sollten die Coordinaten x und y eines Punktes C gefunden werden, der auf der Linie AB in der Mitte zwischen A und B liegt, so ist $p = q = 1$, also

$$x = \frac{x'' + x'}{2} \text{ und } y = \frac{y'' + y'}{2}.$$

§. 18.

Es sei $\varphi_{x,y} = 0$ irgend eine algebraische oder transcendente Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y. Man denke den einen Veränderlichen y aus der Gleichung entwickelt; er wird dann durch eine Funktion des anderen Veränderlichen x ausgedrückt, und es sei $y = f_x$. Die beiden Gleichungen

$$\varphi_{x,y.} = 0$$
$$y = f_x$$

bedingen dasselbe.

Wird dem x irgend ein bestimmter Werth beigelegt, so nimmt auch y einen bestimmten Werth, oder mehrere bestimmte Werthe an, und dieser Werth, oder diese Werthe von y, und ihre Anzahl, hängen von der Natur der Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ und von den in ihr vorkommenden constanten Ausdrücken ab. Es kann sich fügen, daß, während x einen reellen Werth hat, y imaginär ist.

Man stelle sich vor, x durchlaufe alle reellen Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ in stetiger Folge, und für jeden einzelnen Werth von x denke man den Werth, oder die Werthe von y berechnet, welche der Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ genügen, und welche die Gleichung $y = f_x$ sofort liefert.

Während x sich stetig ändert, (d. h. immer um unendlich Kleines), ändert auch f_x (d. i. y) sich stetig. Während also x stetig alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, wird y eine Reihe von Werthen durchlaufen, die ebenfalls stetig auf einander folgen, oder es wird, wenn für jeden Werth von x mehrere Werthe von y sich finden, y mehrere Reihen von Werthen durchlaufen, und in jeder von diesen Reihen folgen die Werthe sich stetig. Die Reihen der Werthe von y können imaginäre Partieen enthalten.

Man betrachte nun jeden einzelnen Werth von x als Abscisse, jeden dazu gehörigen reellen Werth von y als zugehörige Ordinate, und denke alle Punkte aufgetragen, welche durch die solchergestalt sich ergebenden Coordinaten bestimmt werden. Der Coordinatenwinkel ist dabei beliebig. Die imaginären Werthe von y werden nicht beachtet, weil sie nicht als Ordinaten dienen können. Die Werthe von x folgen stetig auf einander, eben so die Werthe von y in jeder Reihe dieser Werthe; daraus erhellet, daß die Punkte, welche die Werthe von x, und die Werthe jeder einzelnen Reihe von y, als Coordinaten, liefern, unmittelbar auf einander folgen, also eine zusammenhängende Linie ausmachen, es sei denn, daß die Reihe der Werthe von y durch imaginäre Partieen unterbrochen wäre, in welchem Fall die Reihe der Werthe von y eben so viele einzelne Linien liefert, als Partieen reeller Werthe in ihr vorkommen. Das ganze System von Punkten, welche durch die Werthe von x als Abscissen, und durch die sämmtlichen zugehörigen Werthe von y als zugehörige Ordinaten bestimmt werden, es mögen nun jene Punkte eine Linie, oder mehrere einzelne Linien und Punkte ausmachen, betrachtet man als *eine* Linie, und nennt diese die Linie der Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$, und umgekehrt diese Gleichung die Gleichung jener Linie.

Linien heißen *algebraisch* oder *transcendent*, je nachdem ihre Gleichungen algebraisch sind oder transcendent.

Algebraische Linien heißen vom nten Grade oder von der nten Ordnung, wenn ihre Gleichungen vom nten Grade sind. Die in einer Gleichung vorkommenden constanten Ausdrücke pflegt man die *Parameter* der Linie zu nennen, welche jener Gleichung zugehört.

Um die einer Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ entsprechende Linie zu erhalten, kommt es darauf an, alle zusammengehörigen reellen Werthe von x und y zu ermitteln, welche der Gleichung genügen. In welcher Weise diese Werthe gefunden werden, ist gleichgiltig. Daher ist es z. B. nicht nothwendig aus der Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ die Gleichung $y = f_x$ abzuleiten, wie es oben angenommen wurde; man könnte auch umgekehrt aus der Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ die Gleichung $x = \psi y$ herleiten, und alle reellen Werthe für y setzen.

§. 19.

Die *analytische Geometrie* leitet die Eigenschaften der Linien aus ihren Gleichungen ab. Sie bestimmt ferner Flächen durch Gleichungen, und entwickelt aus ihnen die Eigenschaften der Flächen.

Erstes Kapitel

Von der Linie des ersten Grades.

§. 20.

Die allgemeinste Gleichung des ersten Grades ist

$$ay + bx + c = 0.$$

Um die Linie zu erhalten, welche diese Gleichung giebt, muß man ein Paar Coordinatenachsen annehmen, die einen beliebigen Winkel φ bilden, und die sämmtlichen Punkte sich vorstellen, deren Coordinaten erhalten werden, wenn man alle reellen Werthe von x und y ermittelt, welche der Gleichung entsprechen, und die Werthe von x als Abscissen nimmt, während die zugehörigen Werthe von y als Ordinaten dienen.

§. 21.

Setzen wir zunächst den Fall, daß $b = 0$ sei. Die Gleichung $ay + bx + c = 0$ liefert dann für jeden Werth von x einen und denselben Werth für y. Der Gleichung entspricht also in diesem Fall eine gerade Linie, die mit der Abscissenachse parallel ist. Wenn zu gleicher Zeit $c = 0$ ist, so ist $y = 0$ für jeden Werth von x, und die Gleichung liefert alsdann die Abscissenachse selbst. Im ersteren Fall läßt sich die Gleichung, ohne an Allgemeinheit einzubüßen, auf die Form $y = q$ bringen, im anderen auf die Form $y = 0$. Wir werden daher in der Folge eine Gleichung von der Form

$$y = a$$

als die Gleichung einer geraden Linie zu betrachten haben, welche mit der Abscissenachse parallel ist, und welche die Ordinatenachse in der Entfernung a vom Anfangspunkt schneidet, und die Gleichung

$$y = 0$$

als die Gleichung der Abscissenachse selbst.

Setzen wir weiter den Fall, daß in der Gleichung $ay + bx + c = 0$ der Coefficient a gleich 0 sei, so wird für jeden Werth von y sich ein und derselbe Werth von x ergeben. Und denkt man zuerst die Ordinaten auf der Ordinatenachse genommen, und darauf die Abscissen, so liefert die Gleichung eine gerade, mit der Ordinatenachse parallele Linie. Ist zugleich $c = 0$, so giebt die Gleichung die Ordinatenachse. Im ersteren Fall läßt sich die Gleichung auf die Form $x = a$ reduciren, im anderen auf die Form $x = 0$. Eine Gleichung von der Form

$$x = a$$

bezeichnet also eine mit der Ordinatenachse parallele Linie, welche die Abscissenachse in der Entfernung a vom Anfangspunkt schneidet, und die Gleichung

$$x = 0$$

liefert die Ordinatenachse selbst.

§. 22.

Die Gleichung $py + qx + v = 0$ läßt sich, wenn der Coefficient von y nicht 0 ist, auf die Form

$$y = ax + b$$

bringen. Dieser bequemeren Form, die der ursprünglichen an Allgemeinheit nur darin nachsteht, daß der Coefficient von y nicht 0 sein kann, werden wir uns für die folgenden Untersuchungen bedienen.

§. 23.

Wir wollen in dem gegenwärtigen Paragraphen ermitteln, von welcher Natur die Linie ist, welche die Gleichung $y = ax + b$ liefert.

Es sei zuvörderst $b = 0$, die Geichung also von der Gestalt $y = ax$. Für $x = 0$ wird auch y zu Null. Daraus erhellet, daß der Anfangspunkt O der Coordinaten ein Punkt der Linie ist, Fig. 6. Sind x und x' zwei verschiedene beliebige Werthe von x, y und y' die dazu gehörigen von y, so folgt aus

$$y = ax$$

$$\text{und } y' = ax'$$

$$\text{die Proportion } y : y' = x : x'$$

und diese Proportion bedingt, daß die Punkte O, A, B in einer geraden Linie liegen. Ueberhaupt also giebt die Gleichung

$y = ax$ eine gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

Der Winkel, welchen die Linie mit der Abscissenlinie bildet, sei α. Dann verhält sich,

$$\mathrm{Sin}\alpha : \mathrm{Sin}(\varphi - \alpha) = y : x = ax : x.$$

Hieraus folgt

$$1) \quad a = \frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Sin}(\varphi - \alpha)}$$

oder

$$2) \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a\mathrm{Sin}\varphi}{1 + a\mathrm{Cos}\varphi}.$$

Und ist der Coordinatenwinkel φ ein rechter Winkel, so hat man

$$3) \quad \mathrm{tg}\alpha = a.$$

Wir betrachten ferner die Linie, welche uns die Gleichung $y = ax + b$ liefert, während b nicht Null ist. Für $x = 0$ wird $y = b$. Wenn man daher auf der Ordinatenachse $OC = b$ nimmt, so ist C ein Punkt unserer Linie. Setzen wir für x den Werth, für welchen $ax + b = 0$ ist, d. h. setzen wir $x = -\frac{b}{a}$, so nimmt, für diesen Werth von x, die Ordinate y den Werth Null an. Wenn wir also die Abscisse $OD = -\frac{b}{a}$ nehmen, so ist auch D ein Punkt unserer Linie. Die Linie der Gleichung $y = ax + b$ hat also mit der Ordinatenachse einen Punkt C in der Entfernung b von O, und mit der Abscissenachse einen Punkt D in der Entfernung $-\frac{b}{a}$ von O gemeinschaftlich. — Wir wollen jetzt den Anfangspunkt der Abscissen von dem Punkte O nach dem Punkte D verlegen. Die Abscissen, deren Anfangspunkt D ist, seien durch z bezeichnet. Nach §. 6. folgt $x = z - \frac{b}{a}$. Diesen Werth substituiren wir in der Gleichung $y = ax + b$. Sie geht dadurch über in $y = az$. Die Gestalt der letzten Gleichung stimmt mit der oben betrachteten überein, und es erhellet, daß die Gleichung $y = ax + b$ eine gerade Linie liefert, ferner, daß die Resultate unter 1), 2), 3) auch für diese Linie gelten.

Jede Ordinate der Linie $y = ax + b$ ist von der entsprechenden Ordinate der Linie $y = ax$ um b verschieden; daraus

ersieht sich sehr einfach, daß die Gleichung $y = ax + b$ eine gerade Linie gewährt, welche parallel ist mit der $y = ax$.

§. 24.

Nach den bisherigen Untersuchungen dieses Kapitels liefert die Gleichung $py + qx + v = 0$ jedesmal eine gerade Linie, der Coefficient von y mag Null sein oder nicht. Auch kann die Natur der Linie durch den Coordinatenwinkel nicht verändert werden.

Aus §. 15. erhellet ferner, daß umgekehrt eine gerade Linie jedesmal eine Gleichung von der Form $y = ax + b$ giebt, die also im Allgemeinen mit der Form $py + qx + v = 0$ übereinstimmt.

§. 25. Aufgabe.

Es ist ein Punkt C durch seine Coordinaten x' und y', und ein zweiter Punkt D durch seine Coordinaten x'' und y'' gegeben. Man soll die Gleichung der geraden Linie herleiten, welche durch diese beiden Punkte geht.

Auflösung. Die gesuchte Gleichung werde durch $y = ax + b$ vorgestellt, in welcher a und b unbekannte Zahlen bezeichnen. Damit die Linie durch den Punkt C gehe, müssen die Coefficienten a und b der Bedingung genügen, daß

$$y' = ax' + b$$

sei; und damit die Linie auch den Punkt D enthalte, müssen dieselben unbekannten Coefficienten zugleich der Bedingung entsprechen, daß

$$y'' = ax'' + b$$

werde. Diese beiden Gleichungen bestimmen die Unbekannten a und b. Aus ihnen folgt

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = a$$

und

$$\frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'} = b$$

und wenn man die erhaltenen Werthe in $y = ax + b$ substituirt, ergiebt sich

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,x + \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}$$

als die verlangte Gleichung.

Diese Gleichung entspringt auch unmittelbar aus der in §. 15. 2), indem man x und y als variabel betrachtet. Eben so ist die Gleichung §. 15. 1) die verlangte Gleichung, sobald man x und y als veränderlich ansieht. Die letzte Form der Gleichung ist in manchen Fällen bequemer, als die erste. Man hat also für die Gleichung der geraden Linie, welche durch zwei Punkte geht, deren Coordinaten x' und y', und x'' und y'' sind, die beiden Formen zu bemerken:

$$1)\quad y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

$$2)\quad y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}x + \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}.$$

Beide Formen werden unbrauchbar, wenn $x' = x''$ ist. Dann geht aber die Linie parallel zur zweiten Achse, und ihre Gleichung ist $x = x'$.

§. 26. Aufgabe.

Es ist in der Abscissenachse ein Punkt C gegeben durch seine Entfernung p vom Anfangspunkt O, und in der Ordinatenachse ein Punkt D durch seine Entfernung q vom Anfangspunkt; man soll die Gleichung der geraden Linie finden, welche durch die beiden Punkte C und D geht.

Auflösung. Die Abscisse des Punktes C ist p, seine Ordinate Null; die Abscisse des Punktes D ist Null, und seine Ordinate q. Man setze daher in der letzten Gleichung des vorigen Paragraph $x' = p$, $y' = 0$, $x'' = 0$, $y'' = q$ und es entsteht

$$y = -\frac{q}{p}x + q$$

als die verlangte Gleichung. Sie läßt sich umformen in

$$py + qx = pq$$

oder

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1.$$

§. 27. Aufgabe.

Es ist ein Punkt C durch seine Coordinaten x' und y' gegeben, und man soll die Gleichung einer geraden Linie entwickeln, welche durch diesen Punkt geht.

Auflösung. Die verlangte Gleichung sei $y = ax + b$.

Die unbekannten Coefficienten a und b müssen der Bedingung entsprechen, daß

$$y' = ax' + b$$

werde. Diese Gleichung ist diophantisch, wie es die Aufgabe mit sich bringt. Für einen der Unbekannten kann man also unendlich viele beliebige Werthe setzen. Eliminiren wir b, so entsteht

$$1)\quad y - y' = a(x - x').$$

oder

$$\frac{y - y'}{x - x'} = a.$$

Wird dagegen a eliminirt, so ergiebt sich

$$2)\quad \frac{y - b}{y' - b} = \frac{x}{x'}.$$

Jede der Gleichungen 1) und 2) liefert eine gerade Linie, die den Punkt C enthält, welchen constanten Werth man auch für a oder b setzen mag. Jede der Gleichungen liefert also unendlich viele gerade Linien, welche der Aufgabe entsprechen.

Die Gleichung 1) kommt häufig zur Anwendung.

Wenn man in 1) statt a einen bestimmten Werth setzt, wird die Linie zu einer bestimmten; und dadurch, daß man den constanten Ausdruck a zweckmäßig wählt, kann bewirkt werden, daß die Linie noch eine Bedingung erfüllt, außer der, durch den Punkt C zu gehen. Geordnet erhält die Gleichung 1) die Gestalt

$$y = ax + (y' - ax').$$

Der constante Ausdruck a ist also der Coefficient des Veränderlichen x, während die Summe $y' - ax'$ das constante Glied der Gleichung ausmacht.

§. 28. Aufgabe.

Es ist ein Punkt C durch seine Coordinaten x' und y' gegeben; man soll die Gleichung einer geraden Linie bestimmen, welche durch den Punkt C geht, und mit der Abscissenachse den Winkel α bildet.

Auflösung. Nach §. 23. 1) muß der Coefficient a von x in der verlangten Gleichung gleich $\frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Sin}(\varphi - \alpha)}$, unter φ den Coordinatenwinkel verstanden, genommen werden. Diesen Werth von a setze man in die Gleichung 1) des vorigen Paragraphen, und es entsteht

$$1)\quad \frac{y-y'}{x-x'} = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha)}$$

als die verlangte Gleichung.

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so geht die Gleichung über in

$$2)\quad \frac{y-y'}{x-x'} = \operatorname{tg}\alpha.$$

§. 29. Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie durch ihre Gleichung $y = ax + b$ gegeben. Man soll die Länge eines Stückes CD dieser Linie bestimmen, dessen Endpunkte C und D durch ihre Abscissen x' und x'' gegeben sind.

Auflösung. Die Ordinaten der Punkte C und D seien durch y' und y'' bezeichnet. Dann ist nach §. 14.

$$CD = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + 2(x'-x'')(y'-y'')\operatorname{Cos}\varphi}.$$

Nun ist

$$y' = ax' + b$$
$$y'' = ax'' + b$$

also

$$y' - y'' = a(x' - x'')$$

und wenn man diesen Werth oben substituirt, entsteht

$$1)\quad CD = (x'-x'')\sqrt{1 + a^2 + 2a\operatorname{Cos}\varphi}.$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten vereinfacht sich dieser Ausdruck, und geht über in

$$2)\quad CD = (x'-x'')\sqrt{1+a^2}.$$

Die Ausdrücke für das Stück CD sind absolut zu nehmen, wenn es sich bloß um die Länge desselben handelt. Zieht man zugleich seine Lage in Bezug auf einen der Punkte C oder D in Betracht, so ist die Differenz nach §. 6. zu deuten.

Der Ausdruck für CD unter 1) reducirt sich, wenn man den Coefficienten a nicht beibehalten, sondern dafür seinen Werth nach §. 23, nämlich $\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha)}$, setzen will. Man erhält

$$CD = (x'-x'')\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha)^2 + \operatorname{Sin}\alpha^2 + 2\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha)\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha)^2}}$$

$$CD = (x' - x'')\sqrt{\frac{[Sin(\varphi - \alpha) + 2Sin\alpha Cos\varphi]Sin(\varphi - \alpha) + Sin\alpha^2}{Sin(\varphi - \alpha)^2}}$$

$$= (x' - x'')\sqrt{\frac{Sin(\varphi + \alpha)Sin(\varphi - \alpha) + Sin\alpha^2}{Sin(\varphi - \alpha)^2}}$$

$$= (x' - x'')\sqrt{\frac{Sin\varphi^2 - Sin\alpha^2 + Sin\alpha^2}{Sin(\varphi - \alpha)^2}}$$

oder

3) $$CD = (x' - x'')\frac{Sin\varphi}{Sin(\varphi - \alpha)}.$$

Und dieser Ausdrück liefert für den Fall rechtwinkliger Coordinaten

4) $$CD = (x' - x'').\frac{1}{Cos\alpha}.$$

Die Resultate 3) und 4) lassen sich aus der Figur entnehmen.

§. 30.

Der Winkel, welchen eine gerade Linie $y = ax + b$ mit der Abscissenachse bildet, bestimmt sich durch den Coefficienten a; der Coefficient b bestimmt den Punkt, in welchem die Linie die Ordinatenachse schneidet. Beides erhellet aus §. 23. Hieraus folgt:

1) zwei Linien

$$y = ax + b$$

und

$$y = a'x + b'$$

sind parallel, wenn die Coefficienten a und a' einander gleich sind, die Coefficienten b und b' aber verschieden.

2) Die Linien schneiden sich in demselben Punkt der Ordinatenachse, wenn die Coefficienten b und b' gleich, die Coefficienten a und a' verschieden sind.

3) Die Linien schneiden sich in einem Punkt, der nicht der Ordinatenachse angehört, wenn weder die Coefficienten a und a' gleich sind, noch die Coefficienten b und b'.

4) Die Linien fallen in einander, wenn die Coefficienten a und a' gleich sind und zugleich die Coefficienten b und b'.

§. 31. Aufgabe.

Es ist ein Punkt durch seine Coordinaten x' und y' gegeben, und eine gerade Linie $y = ax + b$; man soll die Glei-

chung einer geraden Linie herleiten, welche durch den Punkt geht, und mit der gegebenen Linie parallel ist.

Auflösung. Nach den Paragraphen 27. und 30. ist die verlangte Gleichung

$$\frac{y-y'}{x-x'}=a.$$

§. 32. Aufgabe.

Es sind zwei parallele Linien gegeben

$$1)\quad y=ax+b$$

$$2)\quad y=ax+b'.$$

Man soll die Gleichung der Linie bestimmen, welche mit beiden gegebenen Linien parallel, und gleich weit von beiden entfernt ist.

Auflösung. Die zweite Achse wird von den Linien in Punkten geschnitten, deren Entfernungen vom Anfangspunkt b und b' sind.

Der Punkt der zweiten Achse, welcher in der Mitte zwischen diesen Punkten sich befindet, hat die Ordinate

$$\frac{b+b'}{2}.$$

Eine durch den letztern Punkt mit der gegebenen Linie parallel gelegte Linie ist die verlangte. Daher ist die gesuchte Gleichung

$$y=ax+\frac{b+b'}{2}.$$

§. 33. Aufgabe.

Zwei sich schneidende Linien sind durch die Gleichungen

$$y=ax+b$$

und

$$y=a'x+b'$$

gegeben. Man soll die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes bestimmen.

Auflösung. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes seien x' und y'. Der Durchschnittspunkt liegt gleichzeitig in beiden Linien. Daher müssen beide Gleichungen für die Unbekannten x' und y' identisch werden. Zu ihrer Bestimmung dienen also die Gleichungen

$$y'=ax'+b$$

$$y'=a'x'+b'.$$

Aus ihnen folgt

$$x' = \frac{b' - b}{a - a'}$$

$$y' = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

§. 34. Aufgabe.

Zwei sich schneidende gerade Linien sind durch ihre Gleichungen

$$y = ax + b$$

$$y = a'x + b'$$

gegeben; man soll den Winkel bestimmen, welchen sie mit einander bilden.

Auflösung. Der Winkel, welchen die Linie $y = ax + b$ mit der Abscissenachse bildet, sei α, der Winkel, welchen die andere Linie mit der Abscissenachse bildet, sei α'. Es sei ferner $\alpha' > \alpha$. Dann drückt sich β aus durch $\alpha' - \alpha$, und es ist

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}(\alpha' - \alpha)$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\alpha' - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha'\mathrm{tg}\alpha}.$$

Nach §. 23. 2) ist $\mathrm{tg}\alpha' = \frac{a'\mathrm{Sin}\varphi}{1 + a'\mathrm{Cos}\varphi}$ und $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a\mathrm{Sin}\varphi}{1 + a\mathrm{Cos}\varphi}$, unter φ den Coordinatenwinkel verstanden. Diese Werthe substituire man, und es entsteht

$$1)\quad \mathrm{tg}\beta = \frac{(a' - a)\mathrm{Sin}\varphi}{1 + a'a + (a' + a)\mathrm{Cos}\varphi}.$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten geht dies Resultat über in

$$2)\quad \mathrm{tg}\beta = \frac{a' - a}{1 + a'a}.$$

§. 35. Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie durch ihre Gleichung $y = ax + b$ gegeben; man soll die Gleichung einer geraden Linie finden, welche mit jener den Winkel β bildet.

Auflösung. Die Gleichung der verlangten Linie sei $y = a'x + b'$. Die Linie kann eine doppelte Lage gegen die gegebene Linie erhalten. Bezeichnet nämlich α den Winkel, welchen die gegebene Linie mit der Abscissenachse bildet, α' den Winkel, unter welchem die gesuchte Linie gegen die Abscissen-

achse geneigt ist, so kann der verlangten Linie eine solche Lage gegeben werden, daß $\alpha' > \alpha$, oder eine solche, daß $\alpha > \alpha'$ wird. Im ersten Fall muß $\alpha' - \alpha = \beta$ sein, im anderen $\alpha - \alpha' = \beta$. Soll die Linie die erste Lage erhalten, so dient nach 1) im vorigen Paragraph zur Bestimmung des unbekannten Coefficienten a' die Gleichung

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{(a' - a)\mathrm{Sin}\varphi}{1 + a'a + (a' + a)\mathrm{Cos}\varphi}.$$

Soll die Linie die andere Lage annehmen, so muß a' der Gleichung genügen

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{-(a' - a)\mathrm{Sin}\varphi}{1 + a'a + (a' + a)\mathrm{Cos}\varphi}.$$

Beide Gleichungen vereinigen sich zu der Doppelgleichung

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\pm(a' - a)\mathrm{Sin}\varphi}{1 + a'a + (a' + a)\mathrm{Cos}\varphi}$$

und diese liefert

$$1)\quad a' = -\frac{\mathrm{Sin}\beta + a\mathrm{Sin}(\beta \pm \varphi)}{a\mathrm{Sin}\beta + \mathrm{Sin}(\beta \mp \varphi)}.$$

Die verlangte Gleichung ist nun

$$y = -\frac{\mathrm{Sin}\beta + a\mathrm{Sin}(\beta \pm \varphi)}{a\mathrm{Sin}\beta + \mathrm{Sin}(\beta \mp \varphi)}x + b'.$$

Der Coefficient b', für den sich, wie es die Natur der Aufgabe mit sich bringt, kein bestimmter Werth ergeben hat, kann jeden beliebigen Werth erhalten. Für einen jeden Werth von b' liefert die Doppelgleichung zwei Linien, die der Aufgabe entsprechen.

Für den Fall, daß $\beta = 90^\circ$ gegeben ist, daß also die verlangte Linie auf der gegebenen normal stehen soll, geht die Gleichung 1) über in

$$2)\quad a' = -\frac{1 + a\mathrm{Cos}\varphi}{a + \mathrm{Cos}\varphi}.$$

Die Werthe von a' in 1) und 2) vereinfachen sich, wenn man sich rechtwinkliger Coordinaten bedient, und gehen über in

$$3)\quad a' = -\frac{\mathrm{Sin}\beta \pm a\mathrm{Cos}\beta}{a\mathrm{Sin}\beta \mp \mathrm{Cos}\beta}$$

$$4)\quad a' = -\frac{1}{a}.$$

Die letzte Bedingung spricht sich auch in der Gleichung aus

$$1 + aa' = 0.$$

§. 36. Aufgabe.

Zwei sich schneidende gerade Linien sind durch ihre Gleichungen $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ gegeben, und in einer derselben, etwa der ersteren, ein Punkt C, durch seine Abscisse x'. Man soll die Länge des Stückes dieser Linie ausdrücken, welches zwischen dem Punkt C und dem Durchschnittspunkt beider Linien sich befindet.

Auflösung. Die Abscisse des Durchschnittspunktes beider Linien ist nach §. 33. gleich $\frac{b'-b}{a-a'}$. Und man hat nach §. 29. das verlangte Stück gleich

$$1) \quad \left(x' - \frac{b'-b}{a-a'}\right)\sqrt{1+a^2+2a\mathrm{Cos}\varphi}$$

oder

$$2) \quad \left(x' - \frac{b'-b}{a-a'}\right)\frac{\mathrm{Sin}\varphi}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)}$$

und für den Fall rechtwinkliger Coordinaten

$$3) \quad \left(x' - \frac{b'-b}{a-a'}\right)\sqrt{1+a^2}$$

oder

$$4) \quad \left(x' - \frac{b'-b}{a-a'}\right)\frac{1}{\mathrm{Cos}\alpha}.$$

§. 37. Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie durch ihre Gleichung $y = ax + b$ gegeben, und ein Punkt C durch seine Coordinaten x' und y'. Man soll den normalen Abstand des Punktes von der geraden Linie bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt C geht, und normal auf der gegebenen geraden Linie steht, ist nach §. 27. und §. 35. 2)

$$\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{1+a\mathrm{Cos}\varphi}{a+\mathrm{Cos}\varphi}$$

oder

$$y = \left(-\frac{1+a\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{a+\mathrm{Cos}\,\varphi}\right)x + \left(\frac{1+a\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{a+\mathrm{Cos}\,\varphi}x' + y'\right)$$

wofür wir setzen wollen

$$y = Ax + B.$$

Das Stück dieser Linie, welches zwischen dem Punkte C und dem Durchschnittspunkte beider Linien sich befindet, ist der verlangte normale Abstand. Nach 1) im vorigen Paragraphen drückt sich derselbe aus durch

$$\left(x' - \frac{b-B}{A-a}\right)\sqrt{1+A^2+2A\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Wenn man in dem ersten Faktor für A und B die Werthe setzt, und etwas reducirt, geht er über in

$$\frac{(ax'+b-y')(a+\mathrm{Cos}\,\varphi)}{1+a^2+2a\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

und setzt man in dem zweiten Faktor den Werth für A, so entsteht nach einiger Umformung,

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi\sqrt{1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}\,\varphi}}{a+\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Der verlangte normale Abstand des Punktes x', y' von der Linie $y = ax + b$ ist daher gleich

$$1)\qquad \frac{ax'+b-y'}{\sqrt{1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}\,\varphi}}\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Für den Fall, daß der Coordinatenwinkel φ ein rechter Winkel ist, geht dieser Ausdruck über in

$$2)\qquad \frac{ax'+b-y'}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Den eben gefundenen Ausdrücken läßt sich eine einfachere Gestalt dadurch geben, daß man in den Nennern statt des Coefficienten a den Werth aus §. 23. setzt. Sie gehen dadurch über in

$$3)\qquad \pm(ax'+b-y')\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)$$

und

$$4)\qquad \pm(ax'+b-y')\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Die Ausdrücke sind absolut zu nehmen, wenn die Lage der Normale nicht beachtet wird, positiv oder negativ, wenn die Lage der Normale gegen die gerade Linie in Betracht kommt, und je nachdem diese Lage es bedingt.

§. 38. Zusatz.

Es sei, wie vorhin, die gerade Linie $y = ax + b$ gegeben, und ein Punkt C durch seine Coordinaten x' und y'. Durch den Punkt C gehe eine gerade Linie, unter dem Winkel γ gegen die Linie $y = ax + b$ geneigt. Das Stück jener Linie, welches zwischen dem Punkt C und dem Durchschnittspunkt beider Linien sich befindet, ist, wie leicht erhellet, gleich dem normalen Abstande des Punktes C von der ersteren geraden Linie, dividirt durch $\sin\gamma$, also gleich

$$1) \quad \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\varphi}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$$

oder, für rechtwinklige Coordinaten,

$$2) \quad \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{1 + a^2}} \cdot \frac{1}{\sin\gamma}$$

und wenn man sich der Ausdrücke 3) und 4) des vorigen Paragraphen bedient

$$3) \quad \pm(ax' + b - y')\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\gamma}$$

$$4) \quad \pm(ax' + b - y')\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

§. 39.

Es seien $y = f_x$ und $z = \varphi_x$ irgend zwei Gleichungen. In beiden Funktionen durchlaufe x alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. Dabei kann es sich fügen, daß, einmal oder mehrmals, während x in beiden Funktionen denselben Werth vorstellt, die Werthe von y und z gleich ausfallen; es ist aber auch möglich, daß für keinen Werth von x, der gleichzeitig in beiden Funktionen gedacht wird, gleiche Werthe von y und z entstehen. Im ersten Fall haben die auf einerlei Coordinatenachsen bezogenen Linien $y = f_x$ und $y = \varphi_x$ einen oder mehrere Punkte gemeinschaftlich, im anderen haben sie keinen Punkt gemein.

Dasselbe in anderen Ausdrücken: Giebt es ein Paar, oder n Paare reeller Werthe von x und y, welche gleichzeitig den beiden Gleichungen $f_{x,y} = 0$ und $F_{x,y} = 0$ entsprechen, so haben die durch diese Gleichungen gegebenen Linien beziehlich einen Punkt, oder n Punkte gemeinschaftlich; giebt es aber keine reellen Werthe von x und y, welche gleichzeitig den bei-

den Gleichungen genügen, so haben die Linien der Gleichungen keinen Punkt gemein.

Das hier Ausgesprochene gilt auch umgekehrt. Daraus folgt unter andern, daß wenn zwei Linien $f_{x,y} = 0$ und $\varphi_{x,y} = 0$ Punkte gemeinschaftlich haben, die Coordinaten derselben erhalten werden, wenn man die Veränderlichen als Unbekannte betrachtet und aus den Gleichungen $f_{x,y} = 0$ und $\varphi_{x,y} = 0$ entwickelt.

§. 40.

Es seien zwei Gleichungen

$$1) \quad f_{x,y} = 0$$

$$2) \quad \varphi_{x,y} = 0$$

gegeben. Man stelle sich vor, die Gleichungen würden durch Addition oder Subtraction mit einander verbunden, und es entstehe dadurch die Gleichung

$$3) \quad \psi_{x,y} = 0.$$

Die drei Gleichungen stehen dann in der Beziehung zu einander, daß aus je zweien die dritte folgt. Und giebt es reelle Werthe von x und y, welche irgend zweien der Gleichungen genügen, so entsprechen sie auch der jedesmaligen dritten Gleichung; giebt es keine reellen Werthe von x und y, welche zweien beliebigen der drei Gleichungen entsprechen, so giebt es auch keine, welche einer von diesen und der übrigen dritten genügen könnten. — Man stelle sich die Linien der drei Gleichungen vor, und es folgt weiter: Haben zwei der drei Linien einen Punkt, oder n Punkte gemeinschaftlich, so enthält auch die jedesmalige dritte Linie diesen Punkt, oder diese n Punkte; haben aber irgend zwei der Linien keinen Punkt gemeinschaftlich, so hat keine der drei Linien mit einer der anderen einen Punkt gemein.

§. 41.

Es seien zwei sich schneidende gerade Linien

$$1) \quad y = ax + b$$

$$2) \quad y = a'x + b'$$

gegeben. Die Addition beider Gleichungen liefert

$$3) \quad y = \frac{a + a'}{2}x + \frac{b + b'}{2}$$

und dieser Gleichung entspricht eine gerade Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der Linien 1) und 2) geht. Die Li-

nie 3) ist offenbar eine bestimmte von den unendlich vielen geraden Linien, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten gedacht werden können. Multipliciren wir die erste der beiden gegebenen Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten n, die zweite mit einem unbestimmten Coefficienten q, und addiren darauf beide Gleichungen, so entsteht

$$4)\quad y = \frac{na + qa'}{n + q} x + \frac{nb + qb'}{n + q}.$$

Die letzte Gleichung wird, welche Werthe man auch den unbestimmten Coefficienten n und q beilegen mag, durch dieselben Werthe von x und y identisch werden, welche den Gleichungen 1) und 2) entsprechen, sie liefert also für jede beliebigen Werthe von n und q eine gerade Linie, welche sich mit den Linien 1) und 2) in demselben Punkt schneidet, und ist die allgemeine Gleichung aller geraden Linien, die durch den Schneidungspunkt der Linien 1) und 2) gehen.

Wenn man in der Gleichung 4) Zähler und Nenner der Quotienten durch n dividirt, und $\frac{n}{q}$ gleich m setzt, so entsteht

$$5)\quad y = \frac{a + ma'}{1 + m} x + \frac{b + mb'}{1 + m}.$$

Die Gleichung hat hierdurch eine einfachere Gestalt erhalten, ohne an Allgemeinheit einzubüßen. Die letzte Gleichung würde auch hervorgehen, wenn man die Gleichung 2) mit dem unbestimmten Coefficienten m multiplicirte, und dann zur Gleichung 1) addirte.

§. 42.

Im vorigen Paragraphen haben wir aus den Gleichungen zweier sich schneidenden geraden Linien eine Gleichung abgeleitet, welche alle geraden Linien liefert, die durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten sich denken lassen. Man kann das Verfahren umkehren, nämlich, wenn die Gleichung einer geraden Linie gegeben ist, aus dieser Gleichung die Gleichungen zweier anderen geraden Linien ableiten, die sich in einem Punkt der gegebenen Linie schneiden. Es sei gegeben

$$1)\quad Ay + Bx + C = 0.$$

Man setze

$$A = a + a'$$
$$B = b + b'$$
$$C = c + c'.$$

Jede einzelne dieser Gleichungen ist diophantisch. Es kann daher jeder einzelnen durch unendlich viele Werthe der rechts stehenden Ausdrücke genügt werden. Man setze ferner

$$2)\quad ay + bx + c = 0$$

$$3)\quad a'y + b'x + c' = 0.$$

Die Summe der Gleichungen 2) und 3) liefert die Gleichung 1). Die Werthe von x und y, welche gleichzeitig die Gleichungen 2) und 3) identisch machen, lassen auch die Gleichung 1) in eine identische übergehen. Die Linien 2) und 3) schneiden sich daher in einem Punkte der Linie 1), vorausgesetzt, die Coefficienten der Gleichungen 2) und 3) seien so gewählt, daß die Quotienten $\frac{b}{a}$ und $\frac{b'}{a'}$ verschieden ausfallen. Hiernach kann man unendlich viele Paare von Linien angeben, welche sich in Punkten der ersten Linie schneiden.

Setzt man

$$ay + bx + (c - p) = 0$$

$$a'y + b'x + (c' + p) = 0,$$

d. h. behält man die Coefficienten a, b, a', b', und läßt nur die Coefficienten c und c' sich ändern, indem man dem Ausdruck p andere und andere Werthe beilegt, so liefern diese Gleichungen unendlich viele Paare von Linien, die sich in Punkten der ersten Linie schneiden, und die Linienpaare laufen parallel.

Wenn man aus der gegebenen Gleichung einer Linie die Gleichungen zweier anderen Linien ableitet, welche sich in einem Punkte der ersten Linie schneiden, so sagt man, jene Gleichung werde *zerlegt*.

Nicht bloß Funktionen des ersten Grades, sondern Funktionen aller Grade lassen sich im Allgemeinen zerlegen. Solches Zerlegen ist zuweilen sehr vortheilhaft. Wenn es nämlich schwierig ist, Punkte einer Linie $f_{x,y}$ zu construiren, so kann eine geschickte Zerlegung von $f_{x,y}$ in zwei Funktionen, $\varphi_{x,y}$ und $\psi_{x,y}$, Linienpaare liefern, die leicht zu construiren sind, und in ihren Durchschnittspunkten Punkte der Linie $f_{x,y}$ darbieten.

§. 43.

Drei gerade Linien

$$y = ax + b$$

$$y = a'x + b'$$

$$y = a''x + b''$$

sind parallel, wenn die Coefficienten a, a', a'' einander gleich sind. Zwei der Linien sind parallel, und diese werden von der dritten geschnitten, wenn die Coefficienten von x jener beiden Linien einander gleich sind, der Coefficient von x der dritten Linie sich aber von jenen gleichen Coefficienten unterscheidet. Sind die Coefficienten a, a', a'' der drei Linien ungleich, so schneidet jede der Linien die beiden anderen, und hierbei sind zwei Fälle möglich: es schneiden sich entweder die Linien in drei verschiedenen Punkten, oder sie schneiden sich in einem und demselben Punkt. Der erste Fall findet Statt, wenn es keine Werthe von x und y giebt, welche die drei Gleichungen zugleich identisch machen, der letzte Fall tritt ein, wenn solche Werthe bestehen; oder mit anderen Worten, der erste Fall liegt vor, wenn die drei Gleichungen, als algebraische angesehen, unabhängig von einander sind, der letzte, wenn die eine Gleichung sich aus den beiden anderen durch Addition oder Subtraction folgern läßt.

Die Bedingungsgleichung, welche die Coefficienten der Gleichungen erfüllen müssen, damit die drei Linien sich in einem Punkte schneiden, wird erhalten, indem man die Veränderlichen x und y aus den drei Gleichungen eliminirt. Es entsteht

$$0 = (a - a')x + b - b'$$

$$0 = (a - a'')x + b - b''$$

weiter

$$0 = (a - a'')(b - b') - (a - a')(b - b'').$$

Hieraus

$$1)\quad a - a' : a - a'' = b - b' : b - b''$$

oder

$$2)\quad ab' + (b - b')a'' = a'b + (a - a')b''.$$

Aus der Gleichung 2) läßt sich leicht a'' oder b'' entnehmen, wenn b'' oder a'' und die Coefficienten der übrigen beiden Gleichungen gegeben sind. Und es findet sich

$$3)\quad a'' = \frac{(b - b'')a' - (b' - b'')a}{b - b'}$$

$$4)\quad b'' = \frac{(a - a'')b' - (a' - a'')b}{a - a'}.$$

§. 44.

Es seien

$$1)\quad f_{x,y} = 0$$

$$2)\quad \varphi_{x,y} = 0$$

irgend zwei Gleichungen. Das Product derselben ist

$$3)\quad f_{x,y} \,.\, \varphi_{x,y} = 0.$$

Aus je zweien dieser drei Gleichungen folgt die dritte. Und Werthe von x und y, welche einer der beiden Gleichungen 1) und 2) entsprechen, genügen auch der Gleichung 3); so wie Werthe, welche die Gleichung 3) erfüllen, nothwendig auch eine der Gleichungen 1) und 2) identisch machen; und stellt man sich alle zusammengehörigen Werthe von x und y vor, welche der Gleichung 3) angehören, so hat man zugleich diejenigen, welche der Gleichung 1) entsprechen, und die der Gleichung 2). Hieraus erhellet, daß die beiden Linien, welche die Gleichungen 1) und 2) liefern, durch die Gleichung 3) allein gegeben werden, und zwar in derselben Lage zu einander, in der sie vermittelst der beiden ersten Gleichungen hervorgehen.

§. 45. Aufgabe.

Zwei sich schneidende gerade Linien sind durch ihre Gleichungen

$$y = ax + b$$

$$y = a'x + b'$$

gegeben; man soll die Gleichung einer geraden Linie herleiten, welche mit jenen beiden Linien gleiche Winkel bildet.

Auflösung. Die verlangte Gleichung sei $y = a''x + b''$. Die Winkel, welche die gegebenen Linien und die gesuchte mit der Abscissenachse bilden, seien beziehlich α, α', α''. Den Winkel, welchen die geforderte Linie mit jeder der gegebenen bildet, bezeichne vorläufig β. In Fig. 7 ist $\alpha'' - \alpha'$ gleich β, und $\alpha'' - \alpha$ gleich dem Nebenwinkel zu β. Bedienen wir uns, der Einfachheit wegen, rechtwinkliger Coordinaten, so ist nach §. 34. 2) einmal

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a'' - a'}{1 + a'a''}, \text{ und dann}$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{a'' - a}{1 + aa''} = \frac{a - a''}{1 + aa''}.$$

Hieraus entspringt für den unbekannten Coefficienten a'' die Gleichung

$$\frac{a'' - a'}{1 + a'a''} = \frac{a - a''}{1 + aa''}$$

Dieselbe Gleichung entsteht, wenn die Linien in anderer Lage gedacht werden. Aus der Gleichung ergiebt sich

$$a'' = \frac{aa' - 1 \pm \sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}{a+a'}.$$

Es gelten beide Werthe der Wurzel, weil zwei verschiedene Linien bestehen, welche der Aufgabe entsprechen. Die verlangte Gleichung ist also entweder

$$1)\quad y = \frac{aa' - 1 + \sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}{a+a'}\,x + b''$$

oder

$$2)\quad y = \frac{aa' - 1 - \sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}{a+a'}\,x + b''.$$

Dem Coefficienten b'' kann, der Natur der Aufgabe gemäß, jeder beliebige Werth beigelegt werden. Die Coefficienten von x gewinnen eine einfachere Gestalt, wenn man nach §. 23. 3) $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha'$ für a und a' setzt. Es entsteht, beide zusammenfassend,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' - 1 \pm \sqrt{(1+\operatorname{tg}\alpha^2)(1+\operatorname{tg}\alpha'^2)}}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha'}$$

$$= \frac{\pm 1 - \operatorname{Cos}(\alpha+\alpha')}{\operatorname{Sin}(\alpha+\alpha')}$$

und dieser Ausdruck ist für + 1 einerlei mit $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}$, und für — 1 gleichbedeutend mit $-\operatorname{Cotg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}$. Daher sind die verlangten Gleichungen auch

$$3)\quad y = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}\,x + b''$$

$$4)\quad y = -\operatorname{Cotg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}\,x + b''.$$

Das Product aus den Coefficienten von x ist — 1. Daraus erhellet, nach §. 35. 4), daß die beiden Linien, welche sich als die gesuchten ergeben haben, auf einander normal stehen.

§. 46. Aufgabe.

Es sind zwei sich schneidende gerade Linien

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

gegeben; man soll die Gleichung der geraden Linie herleiten, die den Winkel halbirt, welcher von den gegebenen Linien gebildet wird.

Auflösung. Die verlangte Gleichung sei $y = a''x + b''$. Die Coefficienten derselben sind zu ermitteln.

Die Linie, welche den Winkel in zwei gleiche Theile theilt, den die gegebenen Linien bilden, ist unter gleichen Winkeln gegen beide gegebenen Linien geneigt. Die gegebenen Linien bilden zwei Winkel, und für jeden giebt es eine Halbirungslinie. Die Linien, deren Gleichungen wir im vorigen Paragraphen ermittelt haben, werden also in die hier gesuchten Linien übergehen, sobald der Coefficient b'' so bestimmt wird, daß jene Linien sich mit den hier gegebenen in einem Punkte schneiden. Die Bestimmung des Coefficienten b'' erfolgt nach §. 43. 4).

Der Coefficient a'' ist nach dem vorigen Paragraphen einmal gleich $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}$, dann gleich $-\operatorname{Cotg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}$. Für den ersten Werth von a'' ist nach §. 43. 4) und §. 23. 3)

$$b'' = \frac{\left(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)b' - \left(\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)b.}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha'}$$
$$= \frac{b\operatorname{Cos}\alpha + b'\operatorname{Cos}\alpha'}{\operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos}\alpha'}.$$

Für den anderen Werth des Coefficienten a'' ist

$$b'' = \frac{\left(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{Cotg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)b' - \left(\operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{Cotg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)b}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha'}$$

welches sich reducirt auf

$$b'' = \frac{b\operatorname{Cos}\alpha - b'\operatorname{Cos}\alpha'}{\operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha'}.$$

Jede der Gleichungen

$$1)\quad y = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}x + \frac{b\operatorname{Cos}\alpha + b'\operatorname{Cos}\alpha'}{\operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos}\alpha'}$$

$$2)\quad y = -\operatorname{Cotg}\frac{\alpha+\alpha'}{2}x + \frac{b\operatorname{Cos}\alpha - b'\operatorname{Cos}\alpha'}{\operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha'}$$

leistet der Aufgabe Genüge. Von den beiden Linien, welche diese Gleichungen liefern, halbirt die eine den einen, die andere den anderen Winkel, der von den gegebenen Linien gebildet wird. Beide Linien stehen auf einander normal.

§. 47.

Die bisher entwickelten Resultate werden in der Folge in Anspruch genommen. Vorläufig mögen einige Beispiele Platz finden, welche ihre Anwendbarkeit zeigen.

§. 48.

Wir beginnen mit dem einfachen Satze, daß die drei Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

In dem Dreieck ABC, Fig. 8, diene die Seite AC als Abscissenachse, die dazu gehörige Höhe OB als Ordinatenachse. Man denke zuvörderst nur die zweite Seite BC und die zu ihr gehörige Höhe AD. Die Linien BC und AD bestimme man gegen die rechtwinkligen Coordinatenachsen OX und OY durch die Abschnitte p, q, p', q'. Die Gleichung der Linie BC ist alsdann nach §. 26.

$$y = -\frac{q}{p}x + q$$

und die der Linie AD

$$y = -\frac{q'}{p'}x + q'.$$

Die Linien BC und AD stehen nach der Voraussetzung normal auf einander. Deshalb ist nach §. 35. 4)

$$1 + \frac{qq'}{pp'} = 0.$$

Diese Gleichung bedingt umgekehrt, daß die Linien, welche zu den in ihr vorkommenden Abschnitten gehören, auf einander normal stehen. Ist aber $1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{q'}{p'} = 0$, so ist auch $1 + \frac{q}{p'} \cdot \frac{q'}{p}$ $= 0$, und denkt man die Linien, welche den Abschnitten p' und q, und p und q' entsprechen, so stehen auch diese auf einander rechtwinklig. Die letzten Linien sind die dritte Seite AB des Dreiecks, und die Linie, welche durch die gegenüberstehende Ecke C und den Durchschnittspunkt der beiden anderen Höhen geht. Die dritte Höhe geht also durch den Durchschnittspunkt der beiden anderen, und darin liegt der Satz.

Aus

$$1 + \frac{qq'}{pp'} = 0$$

folgt

$$qq' = -pp'.$$

Wenn wir von dem Vorzeichen, welches die negative Lage des Stückes p' herbeiführt, absehen, giebt diese Gleichung das bemerkenswerthe Gesetz, daß die Rechtecke aus den Stücken q und q', und p und p' einander gleich sind.

§. 49.

Es seien drei geraden Linien

$$\begin{aligned} &A) \quad y = ax + b \\ &B) \quad y = a'x + b' \\ &C) \quad y = a''x + b'' \end{aligned}$$

gegeben. Zu je zweien von ihnen denke man die Linien, welche ihre Winkel halbiren. Man erhält sechs solcher Halbirungslinien. Von diesen schneiden sich viermal drei in einem Punkt.

Den Beweis abzukürzen, setzen wir rechtwinklige Coordinaten voraus. Die Coefficienten a, a', a'' sind alsdann beziehlich $tg\alpha$, $tg\alpha'$, $tg\alpha''$, unter α, α', α'' die Winkel verstanden, welche von den drei gegebenen Linien mit der Abscissenachse gebildet werden.

Die Winkel, welche die Linien A) und B) mit einander bilden, werden halbirt durch zwei Linien, deren Gleichungen nach §. 46. folgende sind:

$$y = tg\frac{\alpha + \alpha'}{2}x + \frac{b\,Cos\,\alpha + b'\,Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha + Cos\,\alpha'}$$

$$y = -Cotg\frac{\alpha + \alpha'}{2}x + \frac{b\,Cos\,\alpha - b'\,Cos\,\alpha'}{Cos\,\alpha - Cos\,\alpha'}$$

In der ersteren dieser Gleichungen beseitigen wir den Nenner. Sie geht dadurch über in

$$\begin{aligned}(Cos\,\alpha + Cos\,\alpha')\,y &= (Cos\,\alpha + Cos\,\alpha')\,tg\frac{\alpha + \alpha'}{2}x + b\,Cos\,\alpha \\ &\quad + b'\,Cos\,\alpha' \\ &= 2\,Cos\frac{\alpha - \alpha'}{2}\,Sin\frac{\alpha + \alpha'}{2}x + b\,Cos\,\alpha + b'\,Cos\,\alpha'\end{aligned}$$

oder

$(\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Cos}\,\alpha')y = (\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\alpha')x + b\,\mathrm{Cos}\,\alpha + b'\mathrm{Cos}\,\alpha'.$
Die andere Gleichung behandeln wir eben so, und es entsteht
$(\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,\alpha')y = (\mathrm{Sin}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha')x + b\mathrm{Cos}\,\alpha - b'\mathrm{Cos}\,\alpha'.$
Um in derselben Gestalt die Gleichungen der Linien zu erhalten, welche die Winkel halbiren, die von den Linien A) und C) gebildet werden, dürfen wir nur in den letzten beiden Gleichungen statt der einfachen Marken doppelte setzen. Und vertauschen wir in den so entstandenen Gleichungen die nicht markirten constanten Ausdrücke mit einfach markirten, so ergeben sich die Gleichungen der beiden noch übrigen Halbirungslinien.

Die sechs Halbirungslinien sind hiernach

1) $(\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Cos}\,\alpha')y = (\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\alpha')x + b\mathrm{Cos}\,\alpha + b'\mathrm{Cos}\,\alpha'$

2) $(\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,\alpha')y = (\mathrm{Sin}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha')x + b\mathrm{Cos}\,\alpha - b'\mathrm{Cos}\,\alpha'$

3) $(\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Cos}\,\alpha'')y = (\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\alpha'')x + b\mathrm{Cos}\,\alpha + b''\mathrm{Cos}\,\alpha''$

4) $(\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,\alpha'')y = (\mathrm{Sin}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha'')x + b\mathrm{Cos}\,\alpha - b''\mathrm{Cos}\,\alpha''$

5) $(\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathrm{Cos}\,\alpha'')y = (\mathrm{Sin}\,\alpha' + \mathrm{Sin}\,\alpha'')x + b'\mathrm{Cos}\,\alpha' + b''\mathrm{Cos}\,\alpha''$

6) $(\mathrm{Cos}\,\alpha' - \mathrm{Cos}\,\alpha'')y = (\mathrm{Sin}\,\alpha' - \mathrm{Sin}\,\alpha'')x + b''\mathrm{Cos}\,\alpha' - b''\mathrm{Cos}\,\alpha''.$

Ein Blick auf diese Gleichungen läßt bemerken, daß die Addition der Gleichungen 4) und 5) die Gleichung 1) liefert, die Addition der Gleichungen 3) und 6) ebenfalls die Gleichung 1). Die Addition der Gleichungen 2) und 5) führt zur Gleichung 3), die Addition der Gleichungen 2) und 6) zur Gleichung 4). Nach §. 43. schneiden sich dann aber die Linien

1), 4), 5)

in einem Punkt, eben so die Linien

1), 3), 6),

ferner die Linien

2), 3), 5),

und endlich die Linien

2), 4), 6).

Das ist die Behauptung.

Der gegenwärtige Satz umfaßt die bekannten Sätze, daß die drei Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, sich in einem Punkt schneiden; und daß die drei Linien sich in einem Punkt schneiden, von welchen zwei irgend zwei äußere Winkel eines Dreiecks halbiren, die dritte den inneren Winkel, welcher nicht Nebenwinkel zu einem jener äußeren ist.

§. 50.

Wir lassen eine zweite Herleitung folgen, an welche sich weitere Betrachtungen knüpfen.

§. 51.

Man denke zwei sich schneidende gerade Linien, und eine dritte, welche einen der Winkel halbirt, die jene bilden. In der dritten Linie nehme man einen Punkt beliebig, und fälle von ihm aus auf jede der beiden ersten Linien eine Normale. Beide Normalen sind, wie leicht erhellet, einander gleich. Die Halbirungslinie eines Winkels hat also die Eigenschaft, daß jeder Punkt derselben von beiden Schenkeln gleich weit entfernt ist; und umgekehrt, eine Linie halbirt einen Winkel, sobald sie diese Eigenschaft besitzt. Diese Eigenschaft bietet einen anderen Ausgangspunkt.

§. 52.

Nach §. 37. 4) drückt sich die Entfernung eines Punktes x', y' von einer geraden Linie $y = ax + b$, bei rechtwinkligen Coordinaten, aus durch $\pm(ax' + b - y')\,\mathrm{Cos}\,\alpha$. Das doppelte Vorzeichen dieses Ausdrucks bezieht sich darauf, daß der Punkt zur einen oder anderen Seite der geraden Linie liegen kann. Soll umgekehrt ein Punkt x' y' in der Entfernung q von einer geraden Linie $y = ax + b$ sich befinden, so wird dies bedingt durch die Gleichung

$$q = \pm(ax' + b - y')\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$

oder

$$y' = ax' + b \pm \frac{q}{\mathrm{Cos}\,\alpha}$$

und da $ax' + b$ die Ordinate der Linie ausdrückt, so fällt in die Augen, daß für jeden besonderen Werth von x' zwei verschiedene Werthe von y' bestehen, denen zwei Punkte entsprechen, welche zu entgegengesetzten Seiten der geraden Linie liegen. Die Gleichung liefert, wenn man x' und y' als veränderlich betrachtet, zwei gerade Linien, die parallel der gegebenen, zu entgegengesetzten Seiten und in der Entfernung q von derselben laufen.

Es seien nun zwei Linien

$$1)\quad y = ax + b$$

$$2)\quad y = a'x + b'$$

gegeben. Die Gleichung

$$q = \pm(ax + b - y)\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$

liefert alle Punkte, welche sich in der Entfernung q von der Linie 1) befinden; die Gleichung

$$q = \pm(a'x + b' - y)\,\mathrm{Cos}\,\alpha'$$

alle Punkte, welche in derselben Entfernung von der zweiten Linie stehen. Setzen wir

$$3)\quad (ax + b - y)\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \pm(a'x + b' - y)\,\mathrm{Cos}\,\alpha',$$

so ist die bestimmte Entfernung q beseitigt, und die letzte Doppelgleichung liefert alle Punkte, welche sich in gleichen Entfernungen befinden von den beiden gegebenen geraden Linien 1) und 2). Wenn wir in 3) statt a und a' beziehlich tgα und tgα' setzen, und y entwickeln, so ergeben sich die Gleichungen 1) und 2) in §. 46., woraus erhellet, daß alle Punkte, welche von den beiden gegebenen Linien gleich weit entfernt stehen, auf den beiden sich rechtwinklig schneidenden Linien liegen, die die Winkel halbiren, welche von jenen gebildet werden.

§. 53.

Wir denken jetzt drei gerade Linien

$$y = ax + b$$

$$y = a'x + b'$$

$$y = a''x + b''$$

und setzen

$$(ax + b - y)\mathrm{Cos}\,\alpha = F$$

$$(a'x + b' - y)\mathrm{Cos}\,\alpha' = F'$$

$$(a''x + b'' - y)\mathrm{Cos}\,\alpha'' = F''.$$

Dann sind nach dem vorigen Paragraph

$$F = \pm F'$$

$$F = \pm F''$$

$$F' = \pm F''$$

die Gleichungen der Halbirungslinien der Winkel, welche die zuerst gedachten Linien bilden. Diese Doppelgleichungen umfassen die einfachen

1) $F+F' = 0$ 3) $F+F'' = 0$ 5) $F'+F'' = 0$
2) $F-F' = 0$ 4) $F-F'' = 0$ 6) $F'-F'' = 0$.

Die Addition der Gleichungen 4) und 5) liefert die Gleichung 1), die Addition der Gleichungen 3) und 6) liefert ebenfalls die Gleichung 1), die Summe der Gleichungen 2) und 5) ist die Gleichung 3), die der Gleichungen 2) und 6) ist die Gleichung 4). Hieraus erhellet nach §. 43., daß von den sechs Halbirungslinien der Winkel viermal drei sich in einem Punkt schneiden, und das ist der Satz in §. 49.

§. 54.

Wir denken wiederum die geraden Linien

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$
$$y = a''x + b''$$

und behalten die Ausdrücke F, F', F'' in der Bedeutung, welche ihnen im vorigen Paragraphen beigelegt wurde.

Die Entfernung irgend eines Punktes x', y' von jeder einzelnen der drei Linien drückt sich beziehlich aus durch $\pm F$, $\pm F'$, $\pm F''$; wenn man nämlich in diesen Ausdrücken statt der Veränderlichen x und y die besonderen Werthe x' und y' denkt. Soll die Entfernung jenes Punktes von der ersten Linie gleich sein der Summe seiner Entfernungen von den beiden anderen Linien, so entsteht die Bedingungsgleichung

$$\pm F = \pm F' \pm F''.$$

In dieser Gleichung denke man statt der besonderen Werthe x' und y' die Veränderlichen x und y. Sie liefert dann alle Punkte, welche so liegen, daß die Entfernung eines solchen Punktes von einer der gegebenen Linien gleich ist der Summe seiner Entfernungen von den beiden anderen Linien. Die Gleichung umfaßt folgende vier Gleichungen

1) $F+F'+F'' = 0$
2) $F+F'-F'' = 0$
3) $F-F'+F'' = 0$
4) $F-F'-F'' = 0$.

Zu diesen Gleichungen sind wir gelangt, indem wir von der Bestimmung ausgingen, daß die Entfernung des Punktes von der ersten Linie gleich sein soll der Summe seiner Entfernungen von den beiden anderen. Zu denselben Gleichungen werden wir geführt, wenn wir von der Bestimmung aus-

gehen, daß die Entfernung des Punktes von der zweiten oder dritten Linie gleich der Summe seiner Entfernungen von den beiden übrigen sein soll. Mit der einen Bestimmung treten die anderen von selbst ein; deshalb kann nicht die eine allein erfüllt werden; und die Punkte, welche die Gleichungen liefern, haben überhaupt die Eigenschaft, daß ihre Entfernung von einer der Linien gleich ist der Summe ihrer Entfernungen von den anderen, während die Linien wechseln.

Aus der Bedeutung der Ausdrücke F, F′, F″ erhellet sofort, daß jede der oberen vier Gleichungen eine gerade Linie liefert. Die sämmtlichen Punkte also, welche die vorhin ausgesprochene Eigenschaft haben, befinden sich auf vier geraden Linien. Wir wollen diese Linien construiren.

Die Gleichung

$$F = 0$$

ist

$$(ax + b - y)\cos\alpha = 0$$

oder

$$y = ax + b,$$

also die Gleichung der ersten der gegebenen Linien. Eben so ist $F' = 0$ die zweite, $F'' = 0$ die dritte gegebene Linie. Die Gleichungen $F + F' = 0$, $F - F' = 0$ sind die Gleichungen 1) und 2) im vorigen Paragraph, also die Gleichungen der Linien, welche die Winkel halbiren, die von der ersten und zweiten der gegebenen Linien gebildet werden. Eben so die Gleichung $F + F'' = 0$ u. s. w.

Wegen des leichteren Verständnisses werden wir uns im Folgenden auf die Fig. 9 beziehen. Die Linien CD, DE, CE seien die drei gegebenen, die Punkte S, S′, S″ die Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks von den Halbirungslinien der inneren Winkel geschnitten werden, T, T′, T″ die Punkte, in welchen die Halbirungslinien der äußeren Winkel die Seiten treffen.

Man subtrahire die Gleichung 2) von der Gleichung 1). Das liefert $F'' = 0$. Nach §. 43. schneiden sich daher die Linien 1) und 2) und die Linie $F'' = 0$, oder in der Figur die Linie CE, in einem Punkte. Man addire ferner die Gleichungen 1) und 2). Dadurch entsteht $F + F' = 0$. Und deshalb schneiden sich auch dieselben Linien 1) und 2) und die Linie $F + F' = 0$ in einem Punkt. Die letzte Gleichung giebt eine von den Linien, welche die Winkel halbiren, die von den beiden ersten der gegebenen Linien, nämlich CD und DE gebildet werden. Schneiden sich aber die Linien 1), 2) und $F'' = 0$ in einem Punkt, und zugleich die Linien 1), 2) und

$F+F' = 0$, so schneiden sich die vier Linien 1), 2), $F'' = 0$, $F+F' = 0$ in einem Punkt, denn jede der beiden letzten Linien geht durch den Durchschnittspunkt der Linien 1) und 2). Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der vier Linien wird dann in dem Durchschnittspunkt irgend zweier von ihnen dargeboten. Der Durchschnittspunkt der beiden letzten Linien $F'' = 0$ und $F+F' = 0$ ist entweder der Punkt S'', oder der Punkt T''. Deshalb gehen also die beiden Linien 1) und 2) entweder durch den Punkt S'', oder durch den Punkt T''.

Man addire und subtrahire weiter die Gleichungen 3) und 4), und es folgt wie zuvor, daß die Linien 3), 4), $F'' = 0$, $F-F' = 0$ sich in einem Punkte schneiden, der in dem Durchschnittspunkt der Linie $F'' = 0$ und $F-F' = 0$ dargeboten wird. Die Linie $F'' = 0$ ist, wie zuvor, die Linie CE, und die Linie $F-F' = 0$ die andere von den Linien, welche die Winkel bei D halbiren. Wenn wir also vorhin den Punkt S'' oder den Punkt T'' als Durchschnittspunkt erhielten, so ergiebt sich hier umgekehrt der Punkt T'' oder S''.

Aus dem Bisherigen folgt, daß durch jeden der beiden Punkte S'' und T'' zwei von unseren Linien gehen, und zwar entweder die Linien 1) und 2) durch S'', und 3) und 4) durch T'', oder umgekehrt. Ob die ersten oder die anderen Linien durch den Punkt S'' gehen, ist ohne besondere Festsetzungen nicht zu entscheiden, aber auch ein gleichgiltiger Umstand, wie sich zeigen wird.

Durch das Zusammenfassen der Gleichungen 1) und 3), und 2) und 4), dann 1) und 4), und 2) und 3) folgt eben so, daß auch durch einen jeden der Punkte S' und T', und S und T zwei von den in Rede stehenden Linien gehen. Ueberhaupt schneiden sich also in jedem der sechs Punkte S, S', S'', T, T', T'' zwei der vier Linien. Die größte Anzahl der Durchschnittspunkte vier sich schneidender Linien ist aber sechs, und offenbar liegen jedesmal solche drei, in welchen eine der Linien von den übrigen geschnitten wird, in gerader Linie. Deshalb müssen unter den oben genannten Punkten sich viermal drei finden, die in gerader Linie liegen. Wir wollen diese Punkte bestimmen.

Bei dem oben angedeuteten Addiren und Subtrahiren je zweier der Gleichungen folgt für jede einzelne der vier Linien, daß sie gehen muß durch einen der Punkte S und T

zugleich durch einen der Punkte S' und T'

und noch zugleich durch einen der Punkte S'' und T''.

Eine Linie, die wir durch S und S' legen, kann nicht zugleich durch S'' gehen, wie aus der Figur erhellet, also nur

durch T″. Eben so geht eine durch S′ und S″ gelegte Linie nothwendig durch T′, und eine durch S′ und S″ gelegte durch T. Durch jeden der Punkte S, S′, S″ gehen jetzt zwei Linien, durch jeden der Punkte T, T′, T″ nur eine. Oben hatte sich ergeben, daß durch jeden dieser Punkte zwei Linien gehen, deshalb geht die vierte Linie durch die Punkte T, T′, T″.

Durch das Zerfällen der Gleichungen würden wir zu demselben Resultat gekommen sein.

Die Gleichung 1) läßt sich nämlich zerfällen in

$$F = 0$$

$$F' + F'' = 0.$$

Der Durchschnittspunkt der Linien $F = 0$ und $F' + F'' = 0$ ist also ein Punkt der Linie 1). Der Durchschnittspunkt ist aber entweder der Punkt S oder der Punkt T. Dieselbe Gleichung läßt sich auch zerfällen in

$$F' = 0$$

$$F + F'' = 0,$$

folglich ist auch der Durchschnittspunkt der durch diese Gleichungen repräsentirten Linien ein Punkt der Linie 1); und dieser Punkt ist S′ oder T′. Endlich kann die Gleichung zerfällt werden in

$$F'' = 0$$

$$F + F' = 0$$

und deshalb geht die Linie zugleich durch einen der Punkte S″ oder T″. Aehnlich bei den übrigen Linien, und dann weiter wie oben.

§. 55.

Die Halbirungslinie des Winkels α' kann parallel sein der Seite CE. Dann ist die Linie SS′ parallel mit dieser Halbirungslinie und mit der Seite CE, u. m. dgl.

§. 56.

Durch einen Punkt P, Fig. 10, gehen drei gerade Linien nach beliebigen Richtungen. Durch einen zweiten Punkt Q gehen ebenfalls drei gerade Linien, welche die ersteren schneiden. Es entstehen dabei neun Durchschnittspunkte. Wenn man durch je zwei dieser Durchschnittspunkte, welche nicht auf einer jener sechs Linien sich befinden, eine gerade Linie denkt, so erhält man achtzehn Linien; und diese achtzehn Linien zerfallen in sechsmal drei Linien, welche sich in einem Punkte schneiden. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt solcher drei

Linien kann auch in unendliche Entfernung rücken, d. h. mit anderen Worten, solche drei Linien können parallel ausfallen.

Wir wollen zunächst angeben, wie man, wenn irgend eine der achtzehn Linien gewählt ist, die beiden anderen bestimmt, welche mit jener sich entweder in demselben Punkte schneiden, oder mit ihr parallel sind. Es sei z. B. die Linie $N''N_{''}$ gewählt. Man bezeichne die eine der ursprünglichen Linien, welche sich im Punkte N'' schneiden, mit I, die andere mit 2, die Linien, welche den Punkt $N_{''}$ gewähren, mit II und 1, dergestalt, daß die Linien, welche von einem der Punkte P und Q kommen, römische, die, welche vom anderen ausgehen, arabische Ziffern erhalten. Die noch übrigen beiden Linien bezeichne man eben so mit III und 3. Die Punkte nun, in welchen die Linien III und 3 die Linien I und 1 schneiden, liefern die eine, und die Punkte, in welchen sie die Linien II und 2 schneiden, liefern die andere von den beiden Linien, welche mit der Linie $N''N_{''}$ entweder sich in einem Punkt schneiden, oder parallel sind. Wählt man eine andere Linie, etwa $N'N_{\circ}$, so findet man die beiden dazu gehörigen durch eine neue Bezifferung der ursprünglichen Linien.

Wir wollen den Satz für die drei Linien $N''N_{''}$, $N'N_{'}$, $N^{\circ}N_{\circ}$ beweisen. Er wird alsdann für jede der Linien, welche wie diese bestimmt sind, gelten, d. h. allgemein. Zum Beweise bedürfen wir zuvörderst der Gleichungen der Linien I, II, III, 1), 2), 3), $N''N_{''}$, $N'N_{'}$ und $N^{\circ}N_{\circ}$.

Man nehme an, die erste Achse gehe durch den Punkt Q, die zweite durch den Punkt P, und setze vorläufig über den Anfangspunkt der Coordinaten nichts fest.

Die Abscisse des Punktes P ist 0, seine Ordinate sei y'. Die Gleichung einer durch den Punkt P gehenden Linie ist nach §. 27. von der Form

$$\frac{y - y'}{x - 0} = a.$$

Man denke unter a, a', a'' diejenigen constanten Werthe, welche in diese Gleichung gesetzt, beziehlich die Linien I, II, III liefern, und man hat alsdann für diese Linien die Gleichungen

$$\text{I)} \quad y - y' = ax$$

$$\text{II)} \quad y - y' = a'x$$

$$\text{III)} \quad y - y' = a''x.$$

Die Constanten a, a', a'' sind unbekannt, und hängen ab von dem noch festzusetzenden Anfangspunkt der Coordinaten.

Die Abscisse des Punktes Q sei x', seine Ordinate ist 0. Die Gleichung einer Linie, welche durch den Punkt Q geht, hat die Form

$$\frac{x-x'}{y-0} = \alpha.$$

Und wenn wir unter α, α', α'' die constanten Werthe denken, welche den Linien 1, 2, 3 bei dem noch festzusetzenden Anfangspunkt der Coordinaten entsprechen, so sind die Gleichungen dieser Linien

$$1)\quad y = \alpha(x-x')$$
$$2)\quad y = \alpha'(x-x')$$
$$3)\quad y = \alpha''(x-x').$$

Wir bestimmen weiter die Gleichungen der drei übrigen Linien $N''N_{''}$ u. s. f., und ermitteln zu dem Ende zuvörderst die Coordinaten der Punkte N'', $N_{''}$ u. s. w. Die Coordinaten des Punktes N'' seien X'' und Y''. Sie ergeben sich, wenn wir aus den Gleichungen 1) und 2) x und y entwickeln; und es entsteht

$$X'' = \frac{\alpha' x' + y'}{\alpha' - a};\quad Y'' = \frac{\alpha'(ax'+y')}{\alpha' - a}.$$

Die Coordinaten $X_{''}$ und $Y_{''}$ des Punktes $N_{''}$ ergeben sich eben so aus den Gleichungen II) und 1), oder einfacher durch Vertauschen der Coefficienten a und a', und α und α'. Es entsteht

$$X_{''} = \frac{\alpha x' + y'}{\alpha - a'};\quad Y_{''} = \frac{\alpha(a'x'+y')}{\alpha - a'}.$$

Die Gleichung der Linie, welche durch die Punkte N'' und $N_{''}$ geht, ist nun nach §. 25.

$$(X''-X_{''})y - (Y''-Y_{''})x + (X_{''}Y'' - X''Y_{''}) = 0.$$

Die Gleichung mag kürzer vorgestellt werden durch

$$A''y + B''x + C'' = 0.$$

Wenn man die Werthe für X'' u. s. w. setzt, und etwas reducirt, findet sich

$$A'' = \frac{(\alpha - \alpha' + a - a')y' + (a\alpha - a'\alpha')x'}{(\alpha' - a)(\alpha - a')}$$

$$C'' = \frac{(\alpha' - \alpha)y'^2 + (a\alpha' - a'\alpha)x'y' + (a - a')\alpha\alpha'x'^2}{(\alpha' - a)(a - \alpha')}.$$

Des Coefficienten B'' bedürfen wir nicht.

Die Gleichung der Linie $N'N_{,}$ würde eben so aus den Gleichungen I) und 3), und 1) und III) herzuleiten sein. Sie kann sich von der Gleichung für die Linie $N''N_{,,}$ nur in den Marken unterscheiden, und sie geht aus der letzteren hervor, wenn man statt der einfachen Marken doppelte setzt. Die Gleichung der Linie $N'N_{,}$ sei

$$A'y + B'x + C' = 0.$$

Dann ist also

$$A' = \frac{(\alpha - \alpha'' + a - a'')y' + (a\alpha - a''\alpha'')x'}{(\alpha'' - a)(\alpha - a'')}$$

$$C' = \frac{(\alpha'' - \alpha)y'^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)x'y' + (a - a'')\alpha\alpha''x'^2}{(\alpha'' - a)(\alpha - a'')}.$$

Die Gleichung der Linie $N^{\circ}N_{\circ}$ sei

$$Ay + Bx + C = 0.$$

Sie entsteht aus der vorigen, wenn man statt der nicht markirten Buchstaben einfach markirte setzt. Demnach ist

$$A = \frac{(\alpha' - \alpha'' + a' - a'')y' + (a'\alpha' - a''\alpha'')x'}{(\alpha'' - a')(\alpha' - a'')}$$

$$C = \frac{(\alpha'' - \alpha')y'^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')x'y' + (a' - a'')\alpha'\alpha''x'^2}{(\alpha'' - a')(\alpha' - a'')}.$$

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zum eigentlichen Beweise.

Die beiden Linien $N^{\circ}N_{\circ}$ und $N'N_{,}$ schneiden sich entweder, oder sie sind parallel. Wir nehmen zuerst an, sie schneiden sich, und setzen als Anfangspunkt der Coordinaten ihren Durchschnittspunkt R fest. Die constanten Glieder C und C' der Gleichungen dieser Linien müssen dann Null sein; dadurch erhalten wir für die Coefficienten a, a', a'', α, α', α'' die Bedingungsgleichungen:

$$(\alpha'' - \alpha')y'^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')x'y' + (a' - a'')\alpha'\alpha''x'^2 = 0$$

$$(\alpha'' - \alpha)y'^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)x'y' + (a - a'')\alpha\alpha''x'^2 = 0.$$

Die obere Gleichung multiplicire man mit α, die untere mit α', und subtrahire darauf die obere von der unteren; das liefert

$$(\alpha' - \alpha)y'^2 + (a\alpha' - a'\alpha)x'y' + (a - a')\alpha\alpha'x'^2 = 0.$$

Wenn aber dieser Ausdruck Null ist, so verschwindet das constante Glied C'' der Gleichung der Linie $N''N_{,,}$, und es geht auch diese Linie durch den Anfangspunkt R der Coordi-

naten, d. h. es schneiden sich die drei Linien $N^{\circ}N_{\circ}$, $N'N_{,}$, $N''N_{,,}$ in einem Punkt.

Wir nehmen andererseits an, die beiden Linien $N^{\circ}N_{\circ}$ und $N'N_{,}$ seien parallel.

In diesem Fall denken wir die zweite Achse parallel den parallelen Linien, und lässen die erste Achse unbestimmt. Bei der eben gedachten Lage der zweiten Achse sind in den Gleichungen jener Linien die Coefficienten von y Null. Das liefert für die Coefficienten a, a', a'', α, α', α'' die Bedingungsgleichungen

$$(\alpha' - \alpha'' + a' - a'')y' + (a'\alpha' - a''\alpha'')x' = 0$$
$$(\alpha - \alpha'' + a - a'')y' + (a\alpha - a''\alpha'')x' = 0.$$

Die Differenz derselben ist

$$(\alpha - \alpha' + a - a')y' + (a\alpha - a'\alpha')x' = 0.$$

Ist dieser Ausdruck Null, so verschwindet der Coefficient A'' von y in der Gleichung der Linie $N''N_{,,}$, und dann ist diese Linie mit der zweiten Achse parallel, und parallel mit den Linien $N^{\circ}N_{\circ}$ und $N'N_{,}$.

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Die sechs Punkte, in welchen sich die achtzehn im Satz erwähnten Linien zu dreien schneiden, und die beiden zuerst gedachten Punkte P und Q gehören, wie leicht in die Augen springt, dergestalt zusammen, daß, wenn irgend zwei dieser acht Punkte als gegeben betrachtet werden, die übrigen sechs sich bestimmen; und dies gilt auch dann, wenn beliebig viele der Punkte in unendliche Entfernung rücken.

Der Satz gewinnt hierdurch folgende allgemeinere Form:

Wenn drei gerade Linien, die entweder von einem Punkt ausgehen oder parallel sind, von dreien anderen geraden Linien geschnitten werden, die auch entweder durch einen Punkt gehen oder parallel sind, so entstehen neun Durchschnittspunkte, und diese bestimmen achtzehn gerade Linien, die sich zu dreien in sechs Punkten schneiden, von welchen mehrere in unendlicher Entfernung liegen können.

Fig. 11 zeigt ein Beispiel dieser Erweiterung.

Der Satz verliert nichts von seiner Giltigkeit, wenn nicht jede der einen der drei ursprünglichen Linien I, II, III jede der anderen drei 1, 2, 3 schneiden sollte, sondern Linien der einen dieser Gruppen parallel wären mit Linien der anderen. Von den neun Durchschnittspunkten, welche die achtzehn übrigen Linien bestimmen, rücken dann einzelne in unendliche Entfernung.

Als Erläuterung ein paar Beispiele.

In dem Parallelogramm APCQ Fig. 12 ziehen wir von den gegenüberstehenden Ecken P und Q die Linien PF und QE beliebig, betrachten die aus den Punkten P und Q ausgehenden drei Linien als die ursprünglichen unseres Satzes, wählen die Linie CD, und fragen nach denjenigen zwei Linien, welche entweder mit CD parallel sind, oder sich mit CD in einem Punkt schneiden. Wir beziffern nach der zu Anfange des Paragraphen gegebenen Anleitung, wie es in der Figur geschehen ist. Die Durchschnittspunkte der Linien III und 3 mit den Linien 1 und I bestimmen die eine der verlangten Linien. Der Durchschnittspunkt von III und 1 ist E, der Durchschnittspunkt von 3 und I liegt in unendlicher Entfernung; die Linie geht also von E aus nach dem in der Unendlichkeit liegenden Durchschnittspunkt der Linien 3 und I, d. h. mit ihnen parallel. Eben so findet man vermittelst der Punkte, in welchen die Linien III und 3 die Linien 2 und II schneiden, die dritte Linie, von F ausgehend, und mit II und 2 parallel.

Wir wollen weiter nach den beiden Linien fragen, welche mit der Linie GH parallel sind, oder sich mit ihr in demselben Punkte schneiden. Wir vertauschen die Bezifferung der Linien 1 und 2. Die Linien III und 3 schneiden dann die Linien 2 und II in den Punkten E und F, die Durchschnittspunkte der Linien III und 3 mit den Linien 1 und I liegen aber in der Unendlichkeit. Wir erhalten also die Linie EF und eine in der Unendlichkeit liegende Linie. Die letzte Linie und die Linien GH und EF schneiden sich also in einem unendlich entfernten Punkt. Daher sind EF und GH parallel.

Die beiden letzten Sätze können leicht in Bezug auf das Parallelogramm APCQ ausgesprochen werden, oder bezogen auf das Viereck APDQ. Ueberhaupt aber wird einleuchten, daß aus dem allgemeinen hier behandelten Satz eine große Anzahl von Sätzen hervorgeht, wenn man ihn auf besondere Figuren anwendet.

§. 57.

Auf einer jeden von drei parallelen Linien, Fig. 13, seien zwei Punkte A, B, A′, B′, A″, B″ beliebig genommen. Man denke die Linien AA′, BB′, AA″, BB″, A′A″, B′B″. Schneiden sich die letzteren Linien in den Punkten S, S′, S″, so liegen diese Punkte in gerader Linie.

Die erste Achse sei parallel den parallelen Linien, die zweite noch unbestimmt. Die Coordinaten der Punkte A, A′ u. s. w. seien bezeichnet wie folgt

$$A \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \quad A' \begin{cases} x = a' \\ y = b' \end{cases} \quad A'' \begin{cases} x = a'' \\ y = b'' \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x = \alpha \\ y = b \end{cases} \quad B' \begin{cases} x = \alpha' \\ y = b' \end{cases} \quad B'' \begin{cases} x = \alpha'' \\ y = b'' \end{cases}$$

Die Gleichung der Linie AA' ist dann nach §. 25.

$$(a' - a)y - (b' - b)x = a'b - ab'$$

und die Gleichung der Linie BB'

$$(\alpha' - \alpha)y - (b' - b)x = \alpha'b - \alpha b'.$$

Die Coordinaten X und Y des Durchschnittspunktes S der Linien AA' und BB' werden erhalten, wenn wir aus diesen beiden Gleichungen x und y entwickeln. Es entsteht nach einer kleinen Reduction

$$X = \frac{a'\alpha - a\alpha'}{a' - a - (\alpha' - \alpha)} \qquad Y = \frac{a'b - ab' - (\alpha'b - \alpha b')}{a' - a - (\alpha' - \alpha)}.$$

Die Coordinaten der Punkte S' und S'' seien beziehlich durch X' und Y', und durch X'' und Y'' bezeichnet. Durch Vertauschung der Marken ergiebt sich sogleich

$$X' = \frac{a''\alpha - a\alpha''}{a'' - a - (\alpha'' - \alpha)} \qquad Y' = \frac{a''b - ab'' - (\alpha''b - \alpha b'')}{a'' - a - (\alpha'' - \alpha)}$$

$$X'' = \frac{a''\alpha' - a'\alpha''}{a'' - a' - (\alpha'' - \alpha')} \qquad Y'' = \frac{a''b' - a'b'' - (\alpha''b' - \alpha'b'')}{a'' - a' - (\alpha'' - \alpha')}.$$

Als zweite Achse, die noch unbestimmt ist, wählen wir die Linie SS'. Die Abscissen X und X' der Punkte S und S' sind dann Null. Das giebt die Bedingungsgleichungen

$$a'\alpha - a\alpha' = 0$$
$$a''\alpha - a\alpha'' = 0.$$

Die obere werde mit α'', die untere mit α' multiplicirt, darauf subtrahirt, und es entsteht

$$a''\alpha' - a'\alpha'' = 0.$$

Hieraus erhellet, daß auch X'' Null ist, und dann befindet sich der Punkt S'' in der Linie SS'.

Ist in einem besonderen Fall die Linie SS' parallel den gegebenen Linien, also auch parallel der Abscissenachse, so kann sie nicht als Ordinatenachse benutzt werden. In solchem Fall lassen wir die zweite Achse unbestimmt, denken aber die erste Achse durch die Punkte S und S' gehend. Dann sind die

Ordinaten dieser Punkte Null, und das giebt die Bedingungsgleichungen

$$a'b - ab' - \alpha'b + \alpha b' = 0$$
$$a''b - ab'' - \alpha''b + \alpha b'' = 0.$$

Wir multipliciren die untere Gleichung mit b', die obere mit b'' und subtrahiren darauf die obere von der unteren; das liefert

$$a''b' - a'b'' - \alpha''b' + \alpha'b'' = 0.$$

Diese Gleichung bedingt, daß die Ordinate Y'' des Punktes S'' zu Null wird, und dann liegt S'' ebenfalls in der ersten Achse, d. h. mit S und S' in einer geraden Linie.

Damit ist der Satz erwiesen.

Befinden sich unter den drei Linienpaaren AA' und BB', AA'' und BB'', A'A'' und B'B'' zwei Paare, deren Linien parallel sind, so laufen auch die Linien des dritten Paares parallel. Dies erhellet sogleich aus der Figur. Sind aber die Linien A'A'' und B'B'' des einen Paares parallel, während sich die der beiden übrigen Paare schneiden in den Punkten S und S', so ist die Linie, welche durch diese Durchschnittspunkte S und S' geht, parallel mit jenen Linien A'A'' und B'B''.

Die erste Achse sei wie zu Anfange parallel den ursprünglichen parallelen Linien. Die Gleichungen der Linien A'A'' und B'B'' sind dann beziehlich

$$(a'' - a')y - (b'' - b')x = a''b' - a'b''$$
$$(\alpha'' - \alpha')y - (b'' - b')x = \alpha''b' - \alpha'b''.$$

und wenn die Linien parallel laufen, so ist

$$\frac{b'' - b'}{a'' - a'} = \frac{b'' - b'}{\alpha'' - \alpha'}.$$

Daraus entspringt die Bedingungsgleichung

$$a'' - a' = \alpha'' - \alpha'.$$

Es diene SS, als zweite Achse, und es besteht zugleich die oben gefundene Bedingungsgleichung

$$a''\alpha' - a'\alpha'' = 0.$$

Aus der vorletzten Gleichung entwickeln wir a'' und setzen den Werth in die letzte Gleichung. Das liefert

$$(a' - \alpha')\alpha' - (a' - \alpha')\alpha'' = 0$$

oder

$$(a' - \alpha')(\alpha' - \alpha'') = 0.$$

Einer von den Faktoren der linken Seite muß Null sein. Die Abscissen a' und α' sind ungleich, weil sonst die Punkte

A' und B' in einander fielen. Daher ist $\alpha' - \alpha'' = 0$, also auch $a'' - a' = 0$, und daraus erhellet, daß die Linien $A'A''$ und $B'B''$ mit der zweiten Achse SS' parallel sind.

Ist in einem besonderen Fall die Linie SS' mit den gegebenen Linien parallel, so tritt die andere Bedingungsgleichung

$$a'b' - a'b'' - \alpha''b' + \alpha'b'' = 0$$

ein. Aus der Gleichung $a'' - a' = \alpha'' - \alpha'$ entsteht, wenn man sie mit b' multiplicirt

$$a''b' - a'b' - \alpha''b' + \alpha'b' = 0.$$

Die obere Gleichung werde von dieser subtrahirt; das giebt

$$(b'' - b')(a' - \alpha') = 0.$$

Und da auch hier nicht $a' = \alpha'$ sein kann, so muß $b'' = b'$ sein. Dann sind aber die Ordinaten der Punkte A', B', A'', B'' einander gleich; d. h. die Linien $A'B'$ und $A''B''$ befinden sich in einer geraden Linie; und dann befinden sich auch die Linien $A'B''$ und $A''B''$ in einer geraden Linie, die mit SS' parallel ist.

Man denke die Linien AB' und $A'B$, und bezeichne ihren Durchschnittspunkt mit T, ferner die Linien AB'' und $A''B$, bezeichne deren Durchschnittspunkt mit T': die Punkte T, T' und S'' liegen in gerader Linie. Dies läßt sich erweisen, wie die Behauptung zu Anfang. Werden endlich die Linien $A'B''$ und $A''B'$ gezogen, und bezeichnet T'' ihren Durchschnittspunkt, so folgt weiter, daß die Punkte T, T'' und S' in gerader Linie sich befinden, eben so die Punkte T', T'' und S. Im Ganzen hat man also viermal drei in gerader Linie liegende Punkte. Und befinden sich unter den Linienpaaren solche, deren Linien parallel laufen, so gilt auch hier das oben zuletzt Erwiesene.

§. 58.

Auf einer jeden von dreien geraden Linien, welche sich in einem Punkte schneiden, Fig. 14, sind zwei Punkte A, B, A', B', A'', B'' beliebig genommen. Man denke die Linien AA', BB', AA'', BB'', $A'A''$, $B'B''$. Schneiden sich die letzteren Linien in den Punkten S, S', S'', so liegen diese Punkte in gerader Linie.

Wir nehmen den Durchschnittspunkt O der drei gegebenen Linien als Anfangspunkt der Coordinaten. Die Gleichungen der Linien AB, $A'B'$ und $A''B''$ sind dann beziehlich von den Formen

$$y = px$$
$$y = p'x$$
$$y = p''x$$

und die Coordinaten der Punkte A, B u. s. w. gestalten sich wie folgt

$$A\begin{cases} x = a \\ y = pa \end{cases} \quad A'\begin{cases} x = a' \\ y = p'a' \end{cases} \quad A''\begin{cases} x = a'' \\ y = p''a'' \end{cases}$$
$$B\begin{cases} x = b \\ y = pb \end{cases} \quad B'\begin{cases} x = b' \\ y = p'b' \end{cases} \quad B''\begin{cases} x = b'' \\ y = p''b''. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Linien AA′ und BB′ sind nach §. 25. beziehlich

$$(a' - a)y - (p'a' - pa)x = (p - p')aa'$$
$$(b' - b)y - (p'b' - pb)x = (p - p')bb'.$$

Die Abscisse X des Durchschnittspunktes S beider Linien wird erhalten, wenn man x aus diesen Gleichungen entwickelt, und es ergiebt sich nach einer Reduktion

$$X = \frac{(b' - b)aa' - (a' - a)bb'}{ab' - a'b}.$$

Die Abscissen der Punkte S′ und S″, in welchen sich beziehlich die Linien AA″ und BB″, und A′A″ und B′B″ schneiden, seien X′ und X″. Durch bloße Aenderung der Marken findet sich

$$X' = \frac{(b'' - b)aa'' - (a'' - a)bb''}{ab'' - a''b}$$

$$X'' = \frac{(b'' - b')a'a'' - (a'' - a')b'b''}{a'b'' - a''b'}.$$

Wir nehmen die zweite Achse parallel mit der Linie SS′. Das giebt die Bedingungsgleichung X = X′. Und kann aus dieser abgeleitet werden, daß X = X′ = X″, so ist der Satz erwiesen. Man substituire in

$$X' - X = 0$$

die Werthe, beseitige die Nenner, löse die Klammern auf und dividire durch a — b, und es entsteht

$$aa'bb'' - aa'b'b'' + aa''b'b'' - aa''bb' + a'a''bb' - a'a''bb'' = 0.$$

Man bilde ferner die Differenz X″ — X, bringe auf gleichen Nenner, und reducire gehörig im Zähler. Es entsteht

$$X''-X = \frac{(aa'bb''-aa'b'b''+aa''b'b''-aa''bb'+a'a''bb'-a'a''bb'')(a'-b')}{(ab'-a'b)(a'b''-a''b')}$$

Der erste Faktor des Zählers ist Null. Daher ist $X''-X = 0$; und da auch $X'-X = 0$, so folgt

$$X = X' = X''.$$

Befinden sich unter den drei Linienpaaren AA' und BB', AA'' und BB'', A'A'' und B'B'' zwei Paare, deren Linien parallel laufen, so sind, wie sich leicht aus der Figur zu erkennen giebt, auch die Linien des dritten Paares parallel. Sind die Linien A'A'' und B'B'' des einen Paares parallel, während die der beiden übrigen Paare sich schneiden in den Punkten S' und S'', so ist die Linie, welche durch die Durchschnittspunkte S' und S'' geht, parallel jenen Linien A'A'' und B'B''.

Die Gleichungen der Linien A'A'' und B'B'' sind nämlich, wenn wir die Anfangs gemachten Bestimmungen über die Coordinatenachsen u. s. w. beibehalten

$$(a''-a')y-(p''a''-p'a')x = (p'-p'')a'a''$$

$$(b''-b')y-(p''b''-p'b')x = (p'-p'')b'b''$$

und laufen die Linien parallel, so müssen die Coefficienten von x einander gleich sein. Das liefert die Bedingungsgleichung

$$\frac{p''a''-p'a'}{a''-a'} - \frac{p''b''-p'b'}{b''-b'} = 0$$

oder

$$(a'b''-a''b')(p''-p') = 0$$

oder da p'' nicht gleich p' ist

$$1) \quad a'b''-a''b' = 0.$$

Die aus $X'-X = 0$ entsprungene Bedingungsgleichung dividire man durch $a'b''$, während man nöthigenfalls dafür $a''b'$ gebraucht; das liefert

$$ab-ab'+ab''-ab+a'b-a''b = 0$$

oder $$(b''-b')a-(a''-a')b = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{a''-a'}{b''-b'} = \frac{a}{b}.$$

Aus $a'b''-a''b' = 0$ ergiebt sich

$$\frac{a''-a'}{b''-b'} = \frac{a'}{b'}.$$

Die Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ sind nicht einander gleich, denn aus $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ würde folgen

$$ab' - a'b = 0$$

diese Gleichung würde bedingen, daß die Linien AA′ und BB′ parallel laufen (wie solches durch die Gleichung 1) für die Linien A′A″ und B′B″ bedingt wird), und das wäre der Voraussetzung entgegen. Der Quotient $\frac{a'' - a'}{b'' - b'}$ bezeichnet also zwei verschiedene Quotienten, ist daher $\frac{0}{0}$. Dann ist $a'' - a' = 0$ und $b'' - b' = 0$, und dies bedingt, daß die Linien A′A″ und B′B″ parallel der zweiten Achse laufen, also auch parallel der Linie SS′.

Werden die Linien AB′ und A′B, AB″ und A″B gedacht, und ist T Durchschnittspunkt der ersteren, T′ Durchschnittspunkt der anderen, so liegen T, T′ und S″ in gerader Linie. Bezeichnet ferner S″ den Durchschnittspunkt der Linien A′B″ und A″B′, so liegen auch T, T″ und S′, und T′, T″ und S in gerader Linie. U. s. w..

Die Sätze des gegenwärtigen und des vorangehenden Paragraphen liefern folgenden allgemeinen Satz.

Wenn man auf einer jeden von drei geraden Linien, die entweder parallel sind oder sich in einem Punkte schneiden, zwei Punkte beliebig annimmt, und durch je zwei der so erhaltenen sechs Punkte, die nicht auf einer der geraden Linien liegen, gerade Linien denkt, so schneiden sich diese Linien dergestalt, daß viermal drei Durchschnittspunkte in gerader Linie liegen; und sind in einem besonderen Fall zwei solcher Linien parallel, so sind sie es zugleich mit der Linie, welche durch die beiden Durchschnittspunkte der übrigen geht, und in der im anderen Fall ihr Durchschnittspunkt liegen würde; sind endlich zwei Paare der Linien parallel, so sind es auch die Linien des dritten Paares.

Aus diesem allgemeinen Satz gehen viele besonderen Sätze hervor, indem man ihn auf besondere Figuren bezogen ausspricht. Ein Beispiel seiner Anwendbarkeit zu geben, wollen wir die einfache Aufgabe durch ihn lösen, durch einen gegebenen Punkt C, Fig. 15, eine gerade Linie zu zeichnen, welche durch den Durchschnittspunkt zweier gegebenen convergirenden Linien AA′ und BB′ geht. Die Auflösung ist folgende:

Man durchschneide die convergirenden Linien durch zwei beliebige parallele Linien AB und A'B', ziehe AC und BC, A''B'' parallel AB, sonst beliebig; durch die Durchschnittspunkte A'' und B'' der letzteren Linie und der Linien AC und BC lege man noch die Linien A'A'' und B'B'', und DC ist die verlangte Linie. Statt der drei parallelen Linien hätten auch drei sich in einem Punkte schneidende Linien dienen können, wie es Fig. 16 zeigt.

Zweites Kapitel.

Von dem Verlegen der Coordinatenachsen.

§. 59.

Man stelle sich irgend ein Paar Coordinatenachsen OX und OY vor. Ein Punkt A sei durch seine Coordinaten x und y gegen diese Coordinatenachsen gegeben. Es seien ferner zwei sich schneidende gerade Linien $O'X'$ und $O'Y'$ ihrer Lage nach gegen die Coordinatenachsen OX und OY bestimmt. Werden die Linien $O'X'$ und $O'Y'$ als Coordinatenachsen betrachtet, und die Coordinaten x' und y' des Punktes A für diese Coordinatenachsen ermittelt, so sagt man, der Punkt A werde von den Coordinatenachsen OX und OY auf die Coordinatenachsen $O'X'$ und $O'Y'$ verlegt. Man spricht auch von dem Verlegen der Coordinatenachsen schlechthin, wenn man die ersten Coordinatenachsen verläßt und die zweiten statt ihrer gebraucht.

Und ist eine Linie durch ihre Gleichung $f_{x,y} = 0$ für die ersten Coordinatenachsen gegeben, so wird die Linie auf die zweiten Coordinatenachsen verlegt, indem man die Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ ermittelt, welche der Linie für die zweiten Coordinatenachsen entspricht.

Für das Verlegen der Coordinatenachsen läßt sich ein allgemeines Verfahren andeuten. Bezeichnen nämlich x und y die Coordinaten einer Linie $f_{x,y} = 0$ für die ersten Coordinatenachsen, x' und y' die Coordinaten derselben Linie für die zweiten Coordinatenachsen, so bildet man zwei Gleichungen zwischen den Veränderlichen x, y, x', y', den Constanten der Linie $f_{x,y} = 0$, und den Constanten, durch welche die Lage der neuen Coordinatenachsen gegen die ersten bestimmt wird, entwickelt aus diesen beiden Gleichungen die Ausdrücke x und y, und substituirt die gefundenen Werthe in der Gleichung $f_{x,y} = 0$;

sie geht dadurch in die Gleichung $\varphi_{x',y'} = 0$ über, welche dieselbe Linie in ungeänderter Lage liefert, während man sich der zweiten Coordinatenachsen bedient.

§. 60.

Der einfachste Fall des Verlegens der Coordinatenachsen liegt vor, wenn die neuen Achsen beziehlich den alten parallel gehen. Dieser Fall ist bereits in §. 12. behandelt. Und sind x und y die ursprünglichen Coordinaten eines Punktes P, x' und y' die Coordinaten des neuen Anfangspunktes, x'' und y'' die Coordinaten des Punktes P für die neuen Coordinatenachsen, so ist nach jenem Paragraphen

$$x = x' + x''$$
$$y = y' + y''.$$

§. 61. Aufgabe.

Für die Coordinatenachsen OX und OY, Fig. 17, welche den Winkel φ bilden, seien x' und y' die Coordinaten eines Punktes P. Die beiden sich schneidenden Linien O'X' und O'Y' seien beziehlich durch ihre Gleichungen

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

gegeben. Man soll die letzteren Linien als Coordinatenachsen betrachten, und die Coordinaten x'' und y'' des Punktes P für diese neuen Coordinatenachsen bestimmen.

Auflösung. Durch den Punkt P werde die Linie PR parallel mit der neuen Ordinatenachse O'Y' gelegt. Die neue Abscissenachse werde von jener Linie in dem Punkt R geschnitten. O'R und RP sind dann die Coordinaten x'' und y'' des Punktes P für die neuen Coordinatenachsen, und es kommt darauf an, die genannten Stücke zu ermitteln. Zu dem Ende bedarf es der Coordinaten der Punkte O' und R. O' ist der Durchschnittspunkt der Linien

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'.$$

Die Coordinaten $x_,$ und $y_,$ des Punktes O' ergeben sich nach §. 33. und es ist

$$x_, = \frac{b' - b}{a - a'}$$

$$y_, = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

Die Gleichung der Linie PR, welche, durch P gehend, parallel ist mit der Linie $y = a'x + b'$, ist

$$\frac{y - y'}{x - x'} = a'$$

oder

$$y = a'x - a'x' + y'.$$

R ist der Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Linie O'X', deren Gleichung ist

$$y = ax + b.$$

Die Coordinaten des Punktes R seien $x_{\prime\prime}$ und $y_{\prime\prime}$; und es ergiebt sich

$$x_{\prime\prime} = \frac{-a'x' + y' - b}{a - a'}$$

$$y_{\prime\prime} = \frac{-aa'x' + ay' - a'b}{a - a'}.$$

Nach §. 14. ist nun weiter

$$O'R = \sqrt{(x_{\prime\prime} - x_{\prime})^2 + (y_{\prime\prime} - y_{\prime})^2 + 2(x_{\prime\prime} - x_{\prime})(y_{\prime\prime} - y_{\prime})\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Es ist aber

$$x_{\prime\prime} - x_{\prime} = \frac{y' - a'x' - b'}{a - a'}$$

$$y_{\prime\prime} - y_{\prime} = \frac{(y' - a'x' - b')a}{a - a'}$$

und wenn man diese Werthe substituirt, entsteht O'R oder

$$x'' = \frac{y' - a'x' - b'}{a - a'}\sqrt{1 + a^2 + 2a\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

Ferner ist

$$RP = \sqrt{(x' - x_{\prime\prime})^2 + (y' - y_{\prime\prime})^2 + 2(x' - x_{\prime\prime})(y' - y_{\prime\prime})\,\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

und

$$x' - x_{\prime\prime} = \frac{ax' - y' + b}{a - a'} = \frac{y' - ax' - b}{a' - a}$$

$$y' - y_{\prime\prime} = \frac{aa'x' - a'y' + a'b}{a - a'} = \frac{(y' - ax' - b)a'}{a' - a}$$

also, wenn man substituirt, RP oder

$$y'' = \frac{y' - ax' - b}{a' - a} \sqrt{1 + a'^2 + 2a' \mathrm{Cos}\, \varphi}.$$

In den Ausdrücken für x'' und y'' sind die Wurzeln absolut zu nehmen. Wir haben nämlich die Differenzen $x_{''} - x_{'}$, $x' - x_{''}$ u. s. w. nicht willkürlich gebildet, sondern nach Anleitung des §. 6. Die vor den Wurzeln stehenden Faktoren, welche den Differenzen entsprechen, bedingen also schon die Vorzeichen von x'' und y''. Uebrigens fällt leicht in die Augen, daß y'' durch den vor der Wurzel stehenden Faktor positiv oder negativ wird, je nachdem P zur einen oder zur anderen Seite der Linie O'X' liegt. $ax' + b$ ist nämlich die Ordinate desjenigen Punktes der Linie O'X', in welchem sie von y' geschnitten wird, $-ax' - b$ führt also von diesem Punkt bis zur Linie OX, $-ax' - b + y$ dann weiter zu P, und je nachdem P oberhalb oder unterhalb O'X' sich befindet, ist der letztere Ausdruck dem Vorzeichen nach verschieden und mit ihm y''. Aehnlich mit x''. Mehr bedarf es aber nicht, als daß x'' und y'' verschiedene Vorzeichen erhalten, je nachdem sie zur einen oder zur anderen Seite von O'Y' und O'X' liegen. Wenn wir also die Wurzeln absolut nehmen, so sind die verlangten neuen Coordinaten des Punktes P

$$x'' = \frac{y' - a'x' - b'}{a - a'} \sqrt{1 + a^2 + 2a \mathrm{Cos}\, \varphi}$$

$$y'' = \frac{y' - ax' - b}{a' - a} \sqrt{1 + a'^2 + 2a' \mathrm{Cos}\, \varphi}.$$

Bei dieser Annahme erhalten die in dem Raum Y'O'X' befindlichen Punkte positive Coordinaten. Hätte man die Differenzen nicht in der Weise gebildet, wie es geschehen ist, oder nähme man die Wurzeln nicht absolut, so würde ein anderer von den vier Räumen, in welche die neuen Achsen die Ebene theilen, die positiven Coordinaten erhalten.

§. 62.

Ist eine Linie $f_{x',y'} = 0$ auf die neuen Coordinatenachsen zu verlegen, so gelten für die neuen Coordinaten x'' und y'' der Linie die Resultate des vorigen Paragraphen ebenfalls, denn der Punkt P repräsentirt jeden Punkt der Linie $f_{x',y'} = 0$. Um aber die Gleichung $\varphi_{x'',y''} = 0$ dieser Linie für die neuen Coordinatenachsen zu erhalten, müssen aus jenen Resultaten die Ausdrücke x' und y' entwickelt und ihre Werthe in $f_{x',y'} = 0$ substituirt werden.

Bevor wir diese Entwickelung ausführen, deren Ergebniß wir in Folge gebrauchen, setzen wir unter den Wurzeln statt a und a' die Werthe aus §. 23, 1). Es entsteht

$$\sqrt{1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

$$=\sqrt{1+\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{\mathrm{Sin}\,(\varphi-\alpha)^2}+2\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)}\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

$$=\frac{\sqrt{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)[\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)+2\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\varphi]+\mathrm{Sin}\,\alpha^2}}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)}$$

$$=\frac{\sqrt{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)\mathrm{Sin}(\varphi+\alpha)+\mathrm{Sin}\,\alpha^2}}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)}$$

oder

$$\sqrt{1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}\,\varphi}=\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)}.$$

Eben so

$$\sqrt{1+a'^2+2a'\,\mathrm{Cos}\,\varphi}=\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')}.$$

Diese Werthe substituiren wir in dem Resultate des vorigen Paragraphen. Eine leichte Umformung giebt dann

$$y'-a'x'=\frac{x''(a-a')\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)}{\mathrm{Sin}\,\varphi}+b'$$

$$-y'+ax'=\frac{y''(a-a')\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')}{\mathrm{Sin}\,\varphi}-b$$

und hieraus folgt sogleich

$$x'=\frac{x''\,\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)+y''\,\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')}{\mathrm{Sin}\,\varphi}+\frac{b'-b}{a-a'}$$

$$y'=\frac{ax''\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)+a'y''\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')}{\mathrm{Sin}\,\varphi}+\frac{ab'-a'b}{a-a'}$$

oder wenn wir statt a und a' im Zähler des ersten Quotienten die Werthe aus § 23. setzen

$$y'=\frac{x''\,\mathrm{Sin}\,\alpha+y''\,\mathrm{Sin}\,\alpha'}{\mathrm{Sin}\,\varphi}+\frac{ab'-a'b}{a-a'}.$$

Ist nun irgend eine Linie $f_{x',y'}=0$ gegeben für Coordinatenachsen, welche den Winkel φ bilden, werden neue Coordinatenachsen gedacht, die den Gleichungen $y=ax+b$ und

$y = a'x + b'$ entsprechen und die mit der ursprünglichen Abscissenachse beziehlich die Winkel α und α' bilden, und will man die Linie $f_{x',y'} = 0$ auf die neuen Coordinatenachsen übertragen, so geschieht dies, indem man

$$1)\quad x' = \frac{x\,\mathrm{Sin}(\varphi - \alpha) + y\,\mathrm{Sin}(\varphi - \alpha')}{\mathrm{Sin}\,\varphi} + \frac{b' - b}{a - a'}$$

und

$$2)\quad y' = \frac{x\,\mathrm{Sin}\,\alpha + y\,\mathrm{Sin}\,\alpha'}{\mathrm{Sin}\,\varphi} + \frac{ab' - a'b}{a - a'}$$

setzt. Und indem man diese Werthe in $f_{x',y'} = 0$ substituirt, entsteht die Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ derselben Linie für die neuen Achsen. Die doppelten Marken haben wir der Einfachheit wegen unterdrückt.

Die Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ ist stets mit der Gleichung $f_{x',y'} = 0$ von demselben Grade, d. h. durch das Verlegen der Coordinatenachsen wird der Grad der Gleichungen von Linien nicht geändert.

§. 63.

Vorzüglich sind es zwei Verlegungen der Coordinatenachsen, die man in Anwendung bringt. Man verlegt sie nämlich am häufigsten dergestalt, daß die neuen Achsen parallel den alten gehen, oder dergestalt, daß die neuen Achsen nicht parallel sind den alten, aber ihr Anfangspunkt im Anfangspunkt der ursprünglichen sich befindet. Im ersten Fall sagt man schlechthin, man verlege den Anfangspunkt, im anderen, man verlege die Achsen mit Beibehaltung des Anfangspunktes. Für den letzten Fall gehen die Formeln des vorigen Paragraphen, da b und b' Null sind, über in

$$1)\quad x' = \frac{x\,\mathrm{Sin}(\varphi - \alpha) + y\,\mathrm{Sin}(\varphi - \alpha')}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

$$2)\quad y' = \frac{x\,\mathrm{Sin}\,\alpha + y\,\mathrm{Sin}\,\alpha'}{\mathrm{Sin}\,\varphi}.$$

Ist der Coordinatenwinkel φ der ursprünglichen Coordinatenachsen ein rechter Winkel, so gehen diese Formeln über in

$$3)\quad x' = x\,\mathrm{Cos}\,\alpha + y\,\mathrm{Cos}\,\alpha'$$

$$4)\quad y' = x\,\mathrm{Sin}\,\alpha + y\,\mathrm{Sin}\,\alpha'.$$

Es ist

$$(\varphi - \alpha) - (\varphi - \alpha') = \alpha - \alpha = \psi,$$

d. h. gleich dem neuen Coordinatenwinkel. Vermittelst dieses Umstandes kann man ψ in die obigen Formeln einführen. Man hat nämlich

$$\varphi - \alpha = (\varphi - \alpha') + \psi$$
$$\varphi - \alpha' = (\varphi - \alpha) - \psi$$
$$\alpha' = \alpha + \psi$$
$$\alpha = \alpha' - \psi.$$

Geht man zu einem rechtwinkligen Coordinatensystem über, so folgt hiernach aus 1) und 2)

$$5) \quad x' = \frac{x \operatorname{Sin}(\varphi - \alpha) - y \operatorname{Cos}(\varphi - \alpha)}{\operatorname{Sin} \varphi}$$

$$6) \quad y' = \frac{x \operatorname{Sin} \alpha + y \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \varphi}$$

oder auch

$$7) \quad x' = \frac{x \operatorname{Cos}(\varphi - \alpha') + y \operatorname{Sin}(\varphi - \alpha')}{\operatorname{Sin} \varphi}$$

$$8) \quad y' = \frac{-x \operatorname{Cos} \alpha' + y \operatorname{Sin} \alpha'}{\operatorname{Sin} \varphi}$$

und wenn man endlich von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem rechtwinkligen übergeht

$$9) \quad x' = x \operatorname{Cos} \alpha - y \operatorname{Sin} \alpha = x \operatorname{Cos} \alpha' + y \operatorname{Sin} \alpha'$$

$$10) \quad y' = x \operatorname{Sin} \alpha + y \operatorname{Cos} \alpha = -x \operatorname{Cos} \alpha' + y \operatorname{Sin} \alpha'.$$

Drittes Kapitel.

Vom Kreise.

§. 64.

Unter dem geometrischen Ort von Punkten, die gewissen Bedingungen entsprechen, versteht man die Linie oder die Fläche, welche jene Punkte enthält, während dann im Allgemeinen auch jeder Punkt der Linie oder der Fläche jene Bedingungen erfüllt. Der geometrische Ort aller Punkte z. B., die von zweien gegebenen Punkten A und B gleich weit entfernt stehen, ist die Normale auf der Mitte der Linie AB.

§. 65.

Die Coordinaten irgend eines Punktes M seien a und b, die Coordinaten eines zweiten Punktes seien x und y; die Entfernung beider Punkte sei r. Nach §. 14. findet dann die Gleichung Statt:

$$1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\operatorname{Cos}\varphi = r^2.$$

Werden x und y als veränderlich angesehen, so liefert die Gleichung alle Punkte, welche sich in der Entfernung r von dem Punkt M befinden. Der geometrische Ort aller dieser Punkte ist die Kreislinie zum Mittelpunkt M und Radius r. Die Gleichung ist also, wenn wir x und y als veränderlich betrachten, die Gleichung des Kreises zum Radius r, während der Coordinatenwinkel φ, und a die Abscisse, b die Ordinate des Mittelpunktes ist.

Wir werden uns in dem gegenwärtigen Kapitel besonders der rechtwinkligen Coordinaten bedienen. Für rechtwinklige Coordinaten geht die obere Gleichung des Kreises über in

$$2)\quad (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

Setzen wir b = 0 und a = r, d. h. legen wir die Abscissenachse durch den Mittelpunkt, und nehmen wir als Anfangs-

punkt den Durchschnittspunkt des Kreises mit der Abscissenlinie, so geht die letzte Gleichung über in

$$3)\quad y^2 = 2rx - x^2.$$

Nehmen wir endlich den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Abscissen, so ist $a = 0$ und $b = 0$, und die Gleichung 2) liefert

$$4)\quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Gleichung 3) kann auch geschrieben werden $y^2 = (2r - x)x$, und liefert in dieser Gestalt das bekannte Gesetz, daß die Ordinate im Halbkreise mittlere Proportionale ist zu den Stücken des Durchmessers.

§. 66.

Es sei ein Kreis gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$; durch einen vermittelst seiner Coordinaten x' und y' gegebenen Punkt Q gehe eine gerade Linie, und deren Gleichung sei (§. 27.)

$$\frac{y - y'}{x - x'} = c.$$

Wir wollen zunächst die Bedingungen feststellen, unter welchen die gerade Linie und der Kreis keinen Punkt gemeinschaftlich haben, sich schneiden, oder berühren. Nach den Erörterungen in Paragraph 39. und wegen bekannter Eigenschaften des Kreises hängt dies davon ab, ob es keine reellen Werthe von x und y giebt, oder zwei Paare, oder ein Paar, welche gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y = cx - cx' + y'$$

entsprechen.

Wir eliminiren y, und es entsteht

$$x = \frac{(cx' - y')c \pm \sqrt{(1 + c^2) r^2 - (cx' - y')^2}}{1 + c^2}$$

Ist die Wurzel imaginair, so giebt es keine reellen Werthe von x und y, welche gleichzeitig beiden Gleichungen genügen, ist der Radicand etwas Positives, so giebt es zwei Paare solcher Werthe, ist er Null, so giebt es ein Paar. Der Kreis und die gerade Linie haben daher keinen Punkt gemeinschaftlich, wenn

$$1)\quad (1 + c^2) r^2 - (cx' - y')^2 < 0$$

sie schneiden sich, wenn

$$2)\quad (1 + c^2) r^2 - (cx' - y')^2 > 0$$

und die gerade Linie ist Tangente des Kreises, wenn

$$3)\quad (1+c^2)r^2-(cx'-y')^2=0$$

ist.

Die letzte Bedingungsgleichung führt weiter zur Gleichung der Tangente des Kreises. Jeder Werth von c, für welchen die Gleichung 3) identisch ist, läßt nämlich die obere Gleichung der geraden Linie zur Gleichung der Tangente werden. Aus 3) folgt

$$c=\frac{x'y'\pm r\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}}{x'^2-r^2}$$

und daher ist im Allgemeinen die Gleichung der Tangente

$$4)\quad \frac{y-y'}{x-x'}=\frac{x'y'\pm r\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}}{x'^2-r^2}.$$

Wir müssen aber unterscheiden, ob

$$x'^2+y'^2-r^2<0$$

oder

$$x'^2+y'^2-r^2>0$$

oder

$$x'^2+y'^2-r^2=0$$

ist. Im ersten Fall ist die Linie OQ (unter O den Anfangspunkt, der zugleich Mittelpunkt des Kreises ist, verstanden) kleiner als r; es liegt also der Punkt Q innerhalb des Kreises, und die Wurzel ist imaginair, welches anzeigt, daß in diesem Fall durch den Punkt Q keine Tangente für den Kreis gedacht werden kann. Ist $x'^2+y'^2-r^2>0$, so befindet sich der Punkt Q außerhalb des Kreises, die Wurzel ist reell, und die Gleichung 4) eine Doppelgleichung, welche zwei durch den Punkt Q gehende Tangenten für den Kreis liefert. Ist endlich $x'^2+y'^2-r^2=0$, so liegt der Punkt Q in der Peripherie des Kreises, die Wurzel verschwindet, und die Gleichung 4) ist eine einfache Gleichung, welche die eine in dem gegenwärtigen Fall bestehende Tangente des Kreises für den Punkt Q seiner Peripherie gewährt.

In dem Fall, daß

$$x'^2+y'^2-r^2=0$$

ist, reducirt sich die Gleichung 4). Es verschwindet nämlich die Wurzel, und wenn man im Nenner $-y'^2$ statt x'^2-r^2 setzt, geht die Gleichung über in

$$\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{x'}{y'}$$

oder $$y'y + x'x = x'^2 + y'^2$$

oder $$5) \quad y'y + x'x = r^2$$

und dies ist die Gleichung für die Tangente unseres Kreises, während x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes vorstellen.

§. 67.

Es seien zwei Kreise gegeben

$$1) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$2) \quad (x-a')^2 + (y-b')^2 = r'^2.$$

Die Differenz beider Gleichungen ist

$$3) \quad 2(b-b')y + 2(a-a')x = a^2 + b^2 - r^2 - (a'^2 + b'^2 - r'^2)$$

und der letzten Gleichung entspricht eine gerade Linie.

Unmittelbar nach Paragraph 40. ergiebt sich Folgendes:

Schneiden sich die Kreise 1) und 2), so geht die gerade Linie 3) durch ihre Durchschnittspunkte, und sie hat keinen anderen Punkt mit einem der Kreise gemein. Die gerade Linie ist dann gemeinschaftliche Secante beider Kreise. Da eine gerade Linie und ein Kreis sich in zwei Punkten schneiden, so kann man hierin zugleich einen Beweis des Satzes erblicken, daß zwei Kreise sich in zwei Punkten schneiden.

Berühren sich die Kreise 1) und 2), so geht die gerade Linie 3) durch den Berührungspunkt, ohne noch einen anderen Punkt mit einem der Kreise gemeinschaftlich zu haben. Sie ist dann also gemeinschaftliche Tangente beider Kreise.

Haben die Kreise 1) und 2) keinen Punkt gemein, so hat auch die gerade Linie 3) mit keinem der beiden Kreise einen Punkt gemeinschaftlich.

Die Linie der Gleichung 3) ist demnach die Chordale der beiden Kreise 1) und 2).

§. 68.

Die Chordale zweier Kreise steht normal auf deren Centrale.

Denn legen wir die Abscissenachse durch die Mittelpunkte beider Kreise, so werden die Ordinaten b und b' der Mittelpunkte zu Null, und dann auch der Coefficient von y in der Gleichung der Chordale; welches bedingt, daß dieselbe mit der Ordinatenachse parallel ist, also normal auf der Abscissenachse, und das ist die Centrale.

§. 69.

Die Gleichungen zweier Kreise seien

$$1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

$$2)\quad (x-a')^2+(y-b')^2 = r'^2.$$

Die Gleichung ihrer Chordale ist

$$3)\quad 2(b-b')y+2(a-a')x = a^2+b^2-r^2-(a'^2+b'^2-r'^2).$$

Man stelle sich vor, der Radius r' nehme ab bis er Null ist. Der Kreis 2) reducirt sich dabei auf seinen Mittelpunkt, d. h. auf den Punkt, dessen Coordinaten a' und b' sind. Die Gleichung 3) liefert, während r' Null ist, noch eine gerade Linie. Diese nennen wir die Chordale für den Kreis 1) und den Punkt (a',b'), auf den sich der Kreis 2) reducirt hat.

Um zu der Chordale von Kreis und Punkt zu gelangen, ist es fernerhin nicht nöthig, jedesmal von zwei Kreisen auszugehen. Wenn ein Kreis durch seine Gleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ gegeben ist, und ein Punkt durch seine Coordinaten a' und b', so bestimmt sich die Chordale beider ohne Weiteres durch die Gleichung

$$2(b-b')+2(a-a')x = a^2+b^2-r^2-(a'^2+b'^2).$$

Dabei ist es vortheilhaft, sich für den Punkt der Gleichung $(x-a')^2+(y-b')^2 = 0$ zu bedienen.

§. 70.

1) Die Chordale für Kreis und Punkt ist Tangente des Kreises, wenn der Punkt in der Peripherie des Kreises liegt, und der Punkt ist zugleich Berührungspunkt.

Die Gleichung des Kreises sei

$$1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

Der Punkt sei gegeben durch die Gleichung

$$2)\quad (x-a')^2+(y-b')^2 = 0.$$

Die Gleichung der Chordale beider ist

$$3)\quad 2(b-b')y+2(a-a')x = a^2+b^2-r^2-(a'^2+b'^2).$$

Befindet sich der Punkt in der Peripherie des Kreises, so haben die Oerter der Gleichungen 1) und 2) einen Punkt gemeinschaftlich, und nach Paragraph 40. hat die Linie der Gleichung 3) denselben Punkt mit beiden gemein, aber außer ihm mit dem Kreise keinen zweiten. Darin liegt die Behauptung.

2) Die Chordale für Kreis und Punkt hat mit dem Kreise keinen Punkt gemein, wenn jener Punkt innerhalb oder außerhalb des Kreises sich befindet.

Wir legen die Abscissenachse durch den Punkt und durch den Mittelpunkt des Kreises und wählen den Mittelpunkt des

Kreises als Anfangspunkt der Abscissen. Die Gleichungen 1) und 3) gehen dann über in

$$4)\quad x^2+y^2=r^2$$

$$5)\quad 2a'x=r^2+a'^2.$$

Aus den letzten Gleichungen werde x eliminirt. Es entsteht

$$y^2=r^2-\left(\frac{a'^2+r^2}{2a'}\right)^2$$

oder

$$y^2=-\frac{(a'^2-r^2)^2}{4a'^2}.$$

Liegt nun der Punkt außerhalb oder innerhalb des Kreises, so ist $a \gtrless r$. Und ist $a \gtrless r$, so ist y imaginair. Dann giebt es keine reellen Werthe, welche gleichzeitig den Gleichungen 4) und 5) entsprechen, und dann haben der Kreis und die Chordale keinen Punkt gemeinschaftlich. Das ist der Satz.

Die Chordale für Kreis und Punkt liegt in der Unendlichkeit, wenn der Punkt mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammenfällt. Dies erhellet aus der Gleichung 5) der Chordale, wenn man durch 2a' dividirt, und Null statt a' setzt.

§. 71.

Die Chordale für Kreis und Punkt steht normal auf der geraden Linie, welche durch den Punkt und durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

Folgt, wie §. 68.

§. 72.

Die Gleichungen zweier Kreise seien

$$1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$2)\quad (x-a')^2+(y-b')^2=r'^2.$$

Die Gleichung ihrer Chordale ist

$$3)\quad 2(b-b')y+2(a-a')x=a^2+b^2-r^2-(a'^2+b'^2-r'^2).$$

Man lasse die Radien beider Kreise in Null übergehen. Jeder der Kreise reducirt sich dadurch auf seinen Mittelpunkt. Die Gleichung 3) liefert, während r und r' Null sind, immer noch eine gerade Linie. Diese nennen wir die Chordale der beiden Punkte, auf welche sich die Kreise reducirt haben, und deren Coordinaten a und b sind, und a' und b'.

Wir legen die Abscissenachse durch die Punkte, und benutzen den ersten Punkt als Anfangspunkt. Die Gleichung der Chordale geht alsdann über in

$$0y - 2a'x = -a'^2$$

oder

$$x = \frac{a'}{2}.$$

Hieraus erhellet, daß die Chordale zweier Punkte auf der Verbindungslinie dieser Punkte normal steht, und zwar in der Mitte derselben.

§. 73.

1) Wenn man drei Kreise beliebig annimmt und zu je zweien von ihnen die Chordale bestimmt, so erhält man im Ganzen drei Chordalen, und diese schneiden sich entweder in einem Punkt, oder sie sind parallel.

Die Gleichungen der drei Kreise seien $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Die Gleichungen ihrer Chordalen sind dann

$$1)\quad A - B = 0$$

$$2)\quad A - C = 0$$

$$3)\quad B - C = 0.$$

Die Summe der Gleichungen 1) und 3) ist die Gleichung 2). Daher schneiden sich nach §. 40. die drei Chordalen entweder in einem Punkt, oder sie sind parallel.

2) Läßt man den Radius des einen Kreises, oder die Radien zweier, oder die aller drei Kreise in Null übergehen, also die zugehörigen Kreise in Punkte, so behält man drei Chordalen, und diese schneiden sich in einem Punkt, oder sind parallel.

Beweis wie oben.

3) Der Punkt, in welchem die drei Chordalen dreier beliebigen Oerter (Kreise, Punkte) sich schneiden, heißt der **Chordalpunkt** jener drei Oerter. Der Chordalpunkt liegt in unendlicher Entfernung, wenn die Chordalen parallel laufen.

Aus diesem Paragraphen erhellet unter andern, daß die drei Normalen, auf den Seiten eines Dreiecks in deren Mitten errichtet, sich in einem Punkt schneiden.

§. 74.

1) Wenn aus irgend einem Punkte der Chordale zweier Kreise sich Tangenten an diese Kreise legen lassen, so sind die

Stücke der Tangenten gleich, welche zwischen jenem Punkt und den Berührungspunkten liegen.

Die Gleichungen der Kreise seien

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2 = r'^2.$$

Die Gleichung ihrer Chordale ist

$$2(b-b')y+2(a-a')x = a^2+b^2-r^2-(a'^2+b'^2-r'^2).$$

Der Anfangspunkt der Coordinaten werde in der Chordale angenommen. Dann muß in der Gleichung der Chordale das constante Glied verschwinden, und das liefert für die Coordinaten a, b, a', b' die Bedingungsgleichung

$$a^2+b^2-r^2 = a'^2+b'^2-r'^2.$$

Es mögen die Kreise, Fig. 18, als die gegebenen gelten. Die Linie OV sei ihre Chordale, O ein beliebiger Punkt der Chordale, von dem aus die Tangenten OB und OB′ an die Kreise gelegt sind; zugleich diene O als Anfangspunkt der Coordinaten. Die Coordinaten des Mittelpunktes M seien a und b, a' und b' die des Mittelpunktes M′. Dann ist $a^2+b^2 = OM^2$, $a'^2+b'^2 = OM'^2$, weiter $a^2+b^2-r^2 = OB^2$, und $a'^2+b'^2-r'^2 = OB'^2$, also wegen der Bedingungsgleichung OB gleich OB′. Das ist der Satz.

Aehnlich ist zu zeigen, daß die kleinsten Sehnen gleich ausfallen, welche durch einen Punkt der Chordale gehen, der innerhalb beider Kreise sich befindet.

2) Es sei, Fig. 19, OV die Chordale für den Kreis M und den Punkt M′. Wird in der Chordale der Punkt O beliebig genommen, die Linie OM′ gezogen, und die Tangente OB an den Kreis gelegt, so ist die Linie OM′ gleich der Tangente OB. Folgt wie 1).

Viertes Kapitel.

Von den Linien des zweiten Grades.

§. 75.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades ist

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Die Gleichung liefert verschiedene krumme Linien, je nachdem die Coefficienten gewisse Bedingungen erfüllen. Die krummen Linien, als aus einer Gleichung von derselben allgemeinen Form hervorgegangen, sind ähnlich in ihren Eigenschaften, aber diese Eigenschaften erscheinen bei einer jeden mit eigenthümlichen Abweichungen.

Eine ausführliche Untersuchung der obigen Gleichung führt zu den Linien des zweiten Grades und zu ihren Eigenschaften. Auf solchem Wege hat man es gleichzeitig mit allen den Linien zu thun. Für Anfänger ist es rathsamer, sie einzeln kennen zu lernen. Wir werden daher die Linien des zweiten Grades zuvörderst einzeln vorführen, und sie dann erst aus einem allgemeineren Gesichtspunkt betrachten.

Wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt ist, legen wir rechtwinklige Coordinaten zu Grunde.

I. Von der Parabel.

§. 76.

Die Linie, deren Gleichung ist

$$y^2 = px$$

heißt eine Parabel.

§. 77.

Wir wollen zunächst die Gestalt der Parabel beiläufig bestimmen. Es ist

$$y = \pm\sqrt{px}.$$

Für negative Werthe von x ist y stets imaginair, für positive stets reell. Die Curve liegt also bloß auf der rechten Seite der Ordinatenachse. Hierbei ist p positiv angenommen. Wäre p negativ, so würde umgekehrt y für positive Werthe von x imaginair für negative reell werden, und die Curve zur linken Seite der Ordinatenachse sich befinden. Wir nehmen p positiv an.

Für jeden positiven Werth von x ergeben sich zwei entgegengesetzte, in absoluter Hinsicht gleiche Werthe von y. Die Curve befindet sich also zum Theil oberhalb, zum Theil unterhalb der Abscissenachse, und der obere Theil ist dem unteren congruent.

Wenn $x = 0$ ist, so ist auch $y = 0$. Ist x unendlich klein, so ist auch $y \pm$ Unendlichklein. Die Curve enthält daher den Anfangspunkt O der Coordinaten, Fig. 20, während die beiden nächsten Punkte der Curve zu verschiedenen Seiten der ersten Achse sich befinden; also schneidet die Curve die erste Achse in dem Anfangspunkt.

Während x von 0 bis $+\infty$ wächst, durchläuft y die Werthe von 0 bis $+\infty$ und $-\infty$. Aber das Wachsthum von y, in absoluter Hinsicht, erfolgt anders, wie das von x. Zu Anfange, während die Veränderlichen kleine Werthe haben, wächst y rascher als x, später bei größeren Werthen der Veränderlichen, wächst y langsamer als x, und das Wachsthum von y wird um so geringer, je größere Werthe die Veränderlichen gewinnen. Dies lehrt die Gleichung

$$y^2 = px.$$

Bei kleinen Werthen von y ist nämlich $y^2 < y$, also muß in den kleinen Werthen y rascher wachsen als x, um die Gleichung zu erfüllen; bei großen Werthen wachsen die Quadrate von y beträchtlicher, und daher muß sich das Wachsthum von y mehr und mehr verzögern. Die Curve wird sich also anfangs rascher von der Abscissenachse entfernen, später weniger und weniger, und sich noch später fast parallel mit der Abscissenachse hinziehen. Da x bis $+\infty$ wächst, und y dabei bis $+\infty$ und $-\infty$, so erstreckt sich die Curve rechts ins Unendliche, und schließt sich nicht.

Punkte der Parabel lassen sich construiren, indem man die y als mittlere Proportionalen zu den x und p herstellt, gemäß der Gleichung $y^2 = px$. Dabei giebt sich ebenfalls das verzögerte Wachsthum von y zu erkennen.

Der Punkt O, in welchem die Parabel die erste Achse schneidet, heißt der Scheitelpunkt der Parabel, und die erste Achse OX die Achse der Parabel.

§. 78.

Zwei Linien schneiden sich, wenn sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, und wenn die beiden Punkte jeder der Linien, die jenem Punkte zunächst liegen, sich zu verschiedenen Seiten der anderen Linie befinden. Zwei Linien berühren sich, wenn sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, und wenn die beiden Punkte jeder der Linien, die jenem Punkte zunächst liegen, sich zur einen Seite der anderen Linie befinden.

Zwei gerade Linien können sich nur schneiden, nicht berühren. Eine gerade Linie und eine krumme, oder zwei krumme Linien können sich schneiden, oder berühren; beides kann in mehreren Punkten Statt finden, auch können eine gerade Linie und eine krumme, oder zwei krumme Linien sich in den einen Punkten schneiden, in anderen Punkten berühren. Schneiden sich eine gerade Linie und eine krumme, so heißt die gerade Linie eine Secante der krummen Linie. Jeder Punkt, in welchem zwei Linien sich schneiden, heißt ein Durchschnittspunkt. Berühren sich eine gerade Linie und eine krumme, so heißt die gerade Linie eine Tangente der krummen Linie für den Punkt, welchen beide gemeinschaftlich haben, und dieser Punkt wird der Berührungspunkt genannt.

Wenn man aus den Gleichungen zweier Linien die Veränderlichen in algebraischer Weise entwickelt, so ergeben sich in ihnen, nach Paragraph 39, die Coordinaten derjenigen Punkte, welche beide Linien gemeinschaftlich haben. Solche Punkte können sowohl Berührungspunkte als Durchschnittspunkte sein. Es muß daher in jedem einzelnen Fall besonders nachgewiesen werden, ob man Berührungs- oder Durchschnittspunkte erhalten habe, und diese Entscheidung erfolgt nach den eben aufgestellten Begriffen.

§. 79.

Wir denken eine Parabel

$$1)\quad y^2 = px$$

und eine gerade Linie

$$2)\quad y = ax + b$$

und untersuchen, unter welchen Bedingungen beide Linien keinen Punkt gemein haben, sich schneiden, oder berühren.

Nach §. 39. haben die Linien keinen Punkt gemeinschaftlich, wenn es nicht reelle Werthe von x und y giebt, welche den Gleichungen 1) und 2) entsprechen, und sie haben Punkte gemein, wenn solche Werthe bestehen. Wir entwickeln daher x und y aus den Gleichungen, und erhalten

$$3)\quad x = \frac{p - 2ab \pm \sqrt{(p - 4ab)p}}{2a^2}$$

$$4)\quad y = \frac{p \pm \sqrt{(p - 4ab)p}}{2a}.$$

Wenn a Null ist, sind die Auflösungen 3) und 4) unbrauchbar. In diesem Fall reducirt sich die Gleichung 2) auf

$$5)\quad y = b$$

und liefert eine mit der Achse parallele Linie. Aus den Gleichungen 1) und 5) ist

$$6)\quad x = \frac{b^2}{p},\quad y = b.$$

Die letzten Coordinaten sind stets reell. Daraus erhellet, daß die Parabel 1) und eine mit der Achse parallele gerade Linie 5) jedesmal einen Punkt gemeinschaftlich haben. Es ist zu ermitteln, ob die Linien sich schneiden oder berühren. Man vermindere b um Unendlichkleines und bezeichne das Entstehende durch $b_{,}$, vermehre auch b um Unendlichkleines und bezeichne das Entstehende durch b', und denke die Linien

$$7)\quad y = b_{,}\quad \text{und}\quad 8)\quad y = b'.$$

Die drei geraden Linien 7), 5), 8) sind parallel, liegen unendlich nahe an einander, die Linie 5) zwischen den beiden übrigen. Jede der drei Linien hat mit der Parabel einen Punkt gemeinschaftlich. Die drei Punkte seien beziehlich $Q_{,}$, Q, Q'. Die Coordinaten der Punkte bestimmen sich nach 6); und es sind die drei Abscissen der Punkte unendlich wenig von einander verschieden, eben so die drei Ordinaten. Daraus erhellet, daß die Punkte $Q_{,}$, Q, Q' in der Parabel unmittelbar auf einander folgen. Die Punkte befinden sich zugleich in den parallelen Linien, und wenn man beachtet, daß die Linien 7) und 8) zu verschiedenen Seiten der Linie 5) liegen, wird einleuchten, daß die Parabel 1) und die gerade Linie 5) den Punkt Q gemein haben, während die beiden ihm zunächst liegenden Punkte $Q_{,}$ und Q' der Parabel sich zu verschiedenen Seiten der geraden Linie 5) befinden. Daher schneiden sich die Parabel und diese gerade Linie, und zwar in einem Punkt.

Wir kehren zu den Auflösungen 3) und 4) zurück, und nehmen an, a sei nicht Null. Dann sind drei Fälle zu sondern: entweder ist

$$p - 4ab < 0$$

$$\text{oder } p - 4ab > 0$$
$$\text{oder } p - 4ab = 0.$$

Im ersten Fall sind die Werthe von x und y imaginair, und die Linien 1) und 2) haben keinen Punkt gemeinschaftlich; im zweiten giebt es zwei reelle Werthe von x und zwei reelle Werthe von y, die zusammen gehören, und die Gleichungen 1) und 2) identisch machen, und es haben die Linien 1) und 2) zwei Punkte gemein; im dritten Fall besteht ein Paar reeller Werthe von x und y, welches den Gleichungen entspricht, und es giebt einen Punkt, der gleichzeitig in der Parabel 1) und in der geraden Linie 2) sich befindet.

Ist $p - 4ab > 0$, so schneiden sich die Parabel 1) und die gerade Linie 2) in den beiden Punkten, welche sie gemeinschaftlich haben. Denn nehmen wir in der Gleichung 2) b als veränderlich an, so liefert die Gleichung eine Reihe von parallelen Linien, die einander unendlich nahe liegen, und deren jede mit der Parabel zwei Punkte gemein hat; und bei einer Betrachtung, ähnlich der oben angestellten, fällt in die Augen, daß jede solche Linie, also auch die 2), eine Secante der Parabel ist, und dieselbe in jedem der beiden Punkte schneide, welche sie mit ihr gemein hat.

Ist $p - 4ab = 0$ so berühren sich die Parabel 1) und die gerade Linie 2) in dem ihnen gemeinschaftlichen Punkt. Den Werth von b, welcher der Gleichung $p - 4ab = 0$ entspricht, denken wir um Unendlichkleines vermindert und vermehrt, bezeichnen die entstehenden Werthe durch $b_{\prime}$ und b', und denken die Linien

$$y = ax + b_{\prime}$$
$$y = ax + b'.$$

Diese Linien sind der Linie 2) parallel, liegen zu verschiedenen Seiten derselben und ihr unendlich nahe. Die eine von ihnen hat, nach dem Vorangegangenen, mit der Parabel keinen Punkt gemein, die andere schneidet die Parabel in zwei Punkten, die durch C und D bezeichnet sein mögen. Der Punkt, welchen die Linie 2) unter der gegenwärtigen Annahme mit der Parabel gemein hat, sei Q. Die Punkte C, Q, D folgen in der Parabel unmittelbar auf einander, welches eine Betrachtung ihrer Coordinaten bald zeigt. Die Parabel und die gerade Linie 2) haben daher einen Punkt Q gemein, während die beiden ihm zunächst liegenden Punkte C und D der Parabel sich zur einen Seite der geraden Linie befinden. Mithin berühren sich die Parabel und die gerade Linie.

Im Ganzen hat sich Folgendes ergeben:

Eine Parabel wird von jeder mit ihrer Achse parallelen geraden Linie in einem Punkte geschnitten.

Eine Parabel

$$y^2 = px$$

und eine mit ihrer Achse nicht parallele gerade Linie

$$y = ax + b$$

(unter a also nicht Null verstanden) haben keinen Punkt gemein, wenn $p - 4ab < 0$ ist, sie schneiden sich in zwei Punkten, wenn $p - 4ab > 0$, und sie berühren sich in einem Punkte, wenn $p - 4ab = 0$ ist. Und es können keine anderen Beziehungen zwischen der Parabel und der geraden Linie Statt finden. (Es können z. B. eine Parabel und eine gerade Linie sich nicht in einem Punkte berühren, während sie sich in einem anderen schneiden.)

§. 80. Aufgabe.

Es ist eine Parabel $y^2 = px$ gegeben und ein Punkt Q durch seine Coordinaten x' und y', man soll die Gleichung der geraden Linie herleiten, welche durch den Punkt Q geht und die Parabel berührt.

Auflösung. Damit die gerade Linie durch den Punkt Q gehe, muß ihre Gleichung von der Form sein

$$1) \quad \frac{y - y'}{x - x'} = c$$

und es kommt darauf an, den unbekannten Coefficienten c dergestalt zu bestimmen, daß die gerade Linie die Parabel berühre. Aus 1) folgt

$$y = cx + (y' - cx')$$

und nach dem vorigen Paragraphen besteht für c die Bedingungsgleichung

$$p - 4c(y' - cx') = 0.$$

Aus ihr folgt

$$c^2 - \frac{y'}{x'}c + \frac{p}{4x'} = 0$$

$$c = \frac{y' \pm \sqrt{y'^2 - px'}}{2x'}.$$

Und setzt man diesen Werth in 1), so entsteht

$$2)\quad \frac{y-y'}{x-x'} = \frac{y' \pm \sqrt{y'^2 - px'}}{2x'}$$

als die Gleichung, welche herzuleiten gefordert war.

Es ist aber zu unterscheiden, ob

$$y'^2 - px' < 0$$
$$y'^2 - px' > 0$$
$$y'^2 - px' = 0$$

ist. Im ersten Fall befindet sich der Punkt Q, dessen Coordinaten x' und y' sind, innerhalb des von der Parabel umschlossenen Raumes; die Wurzel ist imaginair, die Gleichung liefert keine Linie, nnd es besteht keine durch den Punkt gehende Tangente für die Parabel. Ist $y'^2 - px' > 0$, so befindet sich der Punkt Q außerhalb des von der Parabel umschlossenen Raumes; die Wurzel ist reell, die Gleichung 2) eine Doppelgleichung, und sie liefert zwei gerade Linien, welche durch den Punkt Q gehen und die Parabel berühren. Ist endlich $y'^2 - px' = 0$, so befindet sich der Punkt Q in der Parabel, die Wurzel verschwindet, die Gleichung 2) reducirt sich auf

$$3)\quad \frac{y-y'}{x-x'} = \frac{y'}{2x'}$$

und liefert eine gerade Linie, welche die Parabel in dem Punkte Q berührt. Wegen der Gleichung $y'^2 - px' = 0$ ist $x' = \frac{y'^2}{p}$. Dieser Werth werde in 3) rechts substituirt, und die Gleichung geht über in

$$4)\quad y - y' = \frac{p}{2y'}(x - x')$$

oder

$$2yy' = px + 2y'^2 - px'$$

oder

$$5)\quad y = \frac{p}{2y'}(x + x').$$

§. 81. Aufgabe.

Es ist, Fig. 20, eine Parabel gegeben durch ihre Gleichung $y^2 = px$, in ihr ein Punkt P durch seine Coordinaten x' und y'; für den Punkt P wird die Tangente PD gedacht, und man soll die Abscisse OD des Durchschnittspunktes D der Tangente und der Achse bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung der Tangente ist

$$y = \frac{p}{2y'}(x + x').$$

Die Abscisse des Durchschnittspunktes ist diejenige, für welche $y = 0$ ist. Für den Werth 0 von y geht die Gleichung über in

$$0 = x + x'$$

also ist

$$x = -x'$$

und in absoluter Hinsicht OD gleich OC.

§. 82.

Das Stück CD heißt die Subtangente. Nach dem vorigen Paragraph ist bei der Parabel die Subtangente das Doppelte von der Abscisse des Berührungspunktes.

§. 83.

Die Subtangente wird gewöhnlich nur ihrem absoluten Werth nach in Betracht gezogen. Wir wollen sie in bestimmterer Weise auffassen, und unter der Subtangente irgend eines Punktes einer Curve die Abscisse desjenigen Punktes verstehen, in welchem die Tangente an jenem Punkt die erste Achse schneidet, während als Anfangspunkt der Punkt dient, in welchem die Ordinate jenes Punktes die erste Achse trifft.

Hierbei erhält die Subtangente ein bestimmtes Vorzeichen, und sie wird positiv oder negativ, je nachdem sie rechts oder links von der Ordinate liegt.

Ist x' die Abscisse des Punktes in der Curve, x die Abscisse des Punktes, in welchem die Tangente die erste Achse schneidet, so drückt sich nach §. 6. die Subtangente aus durch $-x' + x$ oder $x - x'$.

Die Subtangente des Punktes P der Parabel Fig. 20 ist im gegenwärtigen Sinn die Abscisse des Punktes D für C als Anfangspunkt. Die Gleichung der Tangente ist

$$y - y' = \frac{p}{2y'}(x - x').$$

Sie liefert sofort die Subtangente $x - x'$, sobald man Null statt y setzt, denn alsdann geht x in OD über; und es entsteht

$$x - x' = -\frac{2y'^2}{p} = -\frac{2px'}{p} = -2x'.$$

§. 84.

Die Linie, welche auf einer Tangente in dem Berührungspunkte normal steht, heißt die Normale der Curve für diesen Punkt.

§. 85. Aufgabe.

Es ist eine Parabel durch ihre Gleichung $y^2 = px$ gegeben, in ihr ein Punkt durch seine Coordinaten x' und y'; man soll die Gleichung der Normale für diesen Punkt herleiten.

Auflösung. Damit die Normale durch den Punkt x', y' gehe, muß ihre Gleichung von der Form sein:

$$\frac{y-y'}{x-x'} = c$$

und damit sie normal stehe auf der Tangente für den Punkt x', y', muß nach §. 35. und §. 80. $c = -\frac{2y'}{p}$ sein. Die verlangte Gleichung ist demnach

$$y - y' = -\frac{2y'}{p}(x - x').$$

§. 86.

Unter der Subnormale irgend eines Punktes einer Curve verstehen wir die Abscisse des Punktes, in welchem die Normale jenes Punktes die erste Achse schneidet, während als Anfangspunkt der Punkt dient, in welchem die Ordinate jenes Punktes die erste Achse trifft.

Die Subnormale fällt positiv oder negativ aus, je nachdem sie von der Ordinate rechts liegt oder links. Und ist x' die Abscisse des Punktes der Curve, x die Abscisse des Punktes, in welchem die Normale die erste Achse schneidet, so ist nach §. 6. die Subnormale gleich $-x'+x$ oder $x-x'$.

§. 87. Aufgabe.

Es ist Fig. 20 eine Parabel durch ihre Gleichung $y^2 = px$ gegeben, in ihr ein Punkt P durch seine Abscisse x', man soll die Subnormale dieses Punktes bestimmen.

Auflösung. Die Normale für P sei PE, und es ist CE die Subnormale, für C als Anfangspunkt. Die Gleichung der Normale ist

$$y - y' = -\frac{2y'}{p}(x - x').$$

Sie liefert die Subnormale in $x-x'$, wenn man Null setzt statt y. Es entsteht

$$x - x' = \frac{p}{2}.$$

Die Subnormale ist also bei der Parabel constant, und gleich $\frac{p}{2}$, wenn $y^2 = px$ die Gleichung der Parabel ist.

§. 88.

Die Mitten paralleler Sehnen einer Parabel liegen in einer geraden Linie, welche mit der Achse parallel ist.

Es sei $y^2 = px$ die Gleichung einer Parabel, $y = ax + b$ die Gleichung einer geraden Linie, welche die Parabel schneidet. Aus beiden Gleichungen werde x eliminirt, und es entsteht

$$y^2 - \frac{p}{a}y + \frac{pb}{a} = 0.$$

Die Werthe von y, welche dieser Gleichung entsprechen, sind die Ordinaten y' und y'' der Durchschnittspunkte beider Linien. Die Summe dieser Werthe, entgegengesetzt genommen, ist bekanntlich dem Coefficienten von y gleich. Daher hat man

$$y' + y'' = \frac{p}{a}.$$

Die Ordinate von der Mitte der Sehne, welche die gerade Linie liefert, ist nach §. 11. $\frac{y'+y''}{2}$ oder $\frac{p}{2a}$. Dieser Ausdruck ist unabhängig von b, also für jeden Werth von b, d. h. für alle mit der Linie $y = ax + b$ parallelen Linien derselbe. Die Mitten aller parallelen Sehnen befinden sich daher in gleicher Entfernung von der Achse, und dann liegen sie in einer mit der Achse parallelen geraden Linie.

§. 89.

1) Ist $y^2 = px$ die Gleichung einer Parabel, $y = ax + b$ die Gleichung einer geraden Linie, welche nicht parallel mit der Achse läuft, so ist

$$y = \frac{p}{2a}$$

die Gleichung der mit der Achse parallelen Linie, welche die Sehne jener geraden Linie und alle mit ihr parallelen Sehnen halbirt. Vor. §.

2) Ist $y^2 = px$ die Gleichung einer Parabel, $y = y'$ die Gleichung einer mit der Achse parallelen Linie, so liefert die Gleichung

$$y = \frac{p}{2y'}x + b$$

wenn man b veränderlich betrachtet, alle Sehnen der Parabel, welche durch jene gerade Linie halbirt werden. — Denn die Linie, welche alle Sehnen halbirt, die aus letzten Gleichung hervorgehen, ist

$$y = p : 2 . \frac{p}{2y'} = y'.$$

3) Jede mit der Achse einer Parabel parallele Linie heißt ein **Durchmesser** der Parabel, und der Punkt, in welchem ein Durchmesser die Parabel trifft, der **Scheitelpunkt** dieses Durchmessers.

4) Die Tangente für den Scheitelpunkt eines Durchmessers ist parallel mit den Sehnen, welche dieser Durchmesser halbirt. Aus 2) und §. 80. 5).

§. 90. Aufgabe.

Es ist, Fig. 21, eine Parabel gegeben durch die Gleichung $y^2 = px$, in der Parabel ein Punkt Q durch seine Coordinaten x', y'. Für den Punkt wird der Durchmesser QX' gedacht und die Tangente QY'. Man soll die Gleichung der Parabel finden, während QX' als erste und QY' als zweite Achse dient.

Auflösung. Der Coordinatenwinkel $Y'QX'$ sei φ. Man nehme irgend einen Punkt N in der Parabel. Seine Coordinaten für die ursprünglichen Coordinatenachsen seien x und y, seine Coordinaten für die neuen Coordinatenachsen x'' und y''. Es kommt darauf an, eine Gleichung zwischen x'' und y'' herzuleiten. Man hat

$$1)\quad y^2 = px$$
$$2)\quad y = y' + y'' \operatorname{Sin}\varphi$$
$$3)\quad x = x' + x'' + y'' \operatorname{Cos}\varphi.$$

Die Werthe von x und y aus 2) und 3) substituire man in 1), das liefert

$$(y' + y'' \operatorname{Sin}\varphi)^2 = p(x' + x'' + y'' \operatorname{Cos}\varphi)$$

oder

$$4)\quad y''^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 + (2y' \operatorname{Sin}\varphi - p \operatorname{Cos}\varphi) y'' = px' - y'^2 + px''.$$

Dabei ist $y'^2 = px'$, also

$$5)\quad px' - y'^2 = 0$$

und wegen §. 80

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{2y'}$$

folglich

$$6)\quad 2y' \operatorname{Sin}\varphi - p \operatorname{Cos}\varphi = 0.$$

Wenn man diese Werthe in 4) setzt, ergiebt sich als die verlangte Gleichung

$$7)\quad y''^2 = \frac{p}{\mathrm{Sin}\,\varphi^2} x''.$$

Setzt man weiter

$$\frac{p}{\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = p'$$

und unterdrückt die Marken, so geht die Gleichung 7) über in

$$y^2 = p'x$$

und stimmt nun, der Form nach, mit der zuerst aufgestellten Gleichung der Parabel überein.

§. 91.

Wird ein Durchmesser als erste, die Tangente für seinen Scheitel als zweite Achse benutzt, so nennt man solche Coordinatenachsen conjugirte Achsen, während dann die zuerst gebrauchten Hauptachsen heißen. Die Coordinaten conjugirter Durchmesser mögen conjugirte Coordinaten, die der Hauptachsen Hauptcoordinaten genannt werden.

§. 92.

Die Gleichung einer Parabel für conjugirte Achsen sei $y^2 = p'x$, und irgend ein Punkt N der Parabel sei Fig. 21 durch die conjugirten Coordinaten x'' und y'' gegeben, dann ist die Gleichung der Tangente dieses Punktes für dasselbe Coordinatensystem

$$y - y'' = \frac{p'}{2y''}(x - x'')$$

und es folgt wie früher, daß die Subtangente ST gleich ist $-2x''$, oder in absoluter Hinsicht gleich dem Doppelten von der Abscisse x'' des Berührungspunktes.

Ueberhaupt, wenn man die Entwickelungen des §. 79. u. s. w. wiederholen wollte, während conjugirte Achsen zu Grunde liegen, so würden, wegen der Uebereinstimmung der Gleichungen, die Resultate wie dort ausfallen.

§. 93.

Aus

$$y^2 = px$$
$$y'^2 = px'$$

folgt

$$y^2 : y'^2 = x : x'$$

d. h. bei der Parabel verhalten sich die Abscissen wie die Quadrate der Ordinaten; ein Gesetz, welches sowohl für die Hauptachsen als für conjugirte gilt.

§. 94.

1) Die Gleichung einer Parabel sei $y^2 = px$. Ein Punkt N werde beliebig angenommen, und seine Coordinaten seien x' und y'. Durch den Punkt N lege man eine Transversale. Der Winkel, welchen sie mit der Achse bildet, sei α, und die Punkte, in welchen sie die Parabel schneidet, seien C und D. Es ist

$$NC.ND.\mathrm{Sin}\,\alpha^2 = y'^2 - px'.$$

Wir bezeichnen vorläufig $\mathrm{tg}\,\alpha$ durch a, und die Gleichung der Transversale ist

$$1)\quad y = ax + y' - ax'.$$

Die Abscissen der Punkte C und D seien x'' und x'''. Nach §. 29. ist alsdann

$$NC = (x' - x'')\sqrt{1+a^2}$$

$$ND = (x' - x''')\sqrt{1+a^2}$$

also $$2)\quad NC.ND = [x'^2 - (x''+x''')x' + x''x'''](1+a^2).$$

Die Werthe x'' und x''' werden erhalten, wenn man x entwickelt aus den Gleichungen 1) und

$$3)\quad y^2 = px.$$

Indem man y eliminirt, entsteht

$$x^2 - \frac{p - 2a(y' - ax')}{a^2}x + \frac{(y' - ax')^2}{a^2} = 0.$$

Es ist also

$$x'' + x''' = \frac{p - 2a(y' - ax')}{a^2}$$

$$x''x''' = \frac{(y' - ax')^2}{a^2}.$$

Diese Werthe substituire man in 2) und es ergiebt sich

$$NC.ND.\frac{a^2}{1+a^2} = a^2x'^2 - [p - 2a(y' - ax')]x' + (y' - ax')^2$$
$$= a^2x'^2 - px' + (2ax' + y' - ax')(y' - ax')$$
$$= y'^2 - px'$$

oder, wenn man tgα für a setzt

$$NC.ND.\sin\alpha^2 = y'^2 - px'.$$

2) Der Ausdruck $y'^2 - px'$ ist constant; daher ist das Product

$$NC.ND.\sin\alpha^2$$

für alle durch den Punkt N gehenden Secanten von unveränderlichem Werth.

3) NC $\sin\alpha$ und ND $\sin\alpha$ sind die Projectionen der Abschnitte NC und ND auf der zweiten Achse oder irgend einer damit parallelen Linie. Daher kann man auch sagen, die Producte aus diesen Projectionen seien gleich.

4) Liegt der Punkt N außerhalb der Parabel, so kann man die Gruppe der durch ihn gehenden Secanten bis zu den Tangenten NT und NT′ fortsetzen und indem man die Tangenten als Secanten betrachtet, deren beide Durchschnittspunkte zusammen fallen, entsteht

$$NT^2 \sin\alpha^2 = NT'^2 \sin\alpha'^2 = y'^2 - px'.$$

Der Werth $NT^2 \sin\alpha^2$ möge die Potenz des Punktes N heißen.

5) Aus 4) folgt

$$NT \sin\alpha = NT' \sin\alpha'$$

d. h. die Tangenten NT und NT′, welche aus einem Punkt an die Parabel sich legen lassen, haben auf der zweiten Achse gleiche Projectionen.

Das Quadrat solcher Projection ist die Potenz des Punktes.

6) Befindet sich der Punkt N innerhalb der Parabel, so wird der Ausdruck $y'^2 - px'$ negativ, auch einer der Abschnitte NC und ND. Die Differenz ist also entgegensetzt zu nehmen, wenn man die Werthe als absolute in Betracht zieht. — Es sei TT′ die durch den Punkt N halbirte Sehne, und es ist

$$NT^2 \sin\alpha^2 = px' - y'^2.$$

Der Werth $NT^2 \sin\alpha^2$ möge hier die Potenz des Punktes N heißen.

7) Der Punkt N befinde sich innerhalb der Parabel, man denke seinen Durchmesser, verlege auf dessen Scheitelpunkt den Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und die Gleichung der vorigen Nummer geht über in

$$NT^2 \sin\alpha^2 = px'.$$

Nimmt man hierin x′ veränderlich, so hat man sofort die Gleichung der Parabel für conjugirte Achsen, nämlich

$$NT^2 = \frac{p}{\operatorname{Sin}\alpha^2} x$$

übereinstimmend mit §. 90. 7).

8) Man setze $y'^2 - px' = v^2$. Ist $x' = 0$, so ist

$$v^2 = y'^2.$$

Ist x' positiv, so ist px' gleich y^2, unter y die zu x' gehörige Ordinate der Parabel verstanden, und man hat

$$v^2 = \pm (y'^2 - y^2).$$

Ist x' negativ, so ist px' wiederum gleich y^2, unter y die Ordinate der Parabel verstanden, welche zu dem positiv genommenen x' gehört, und man hat

$$v^2 = y'^2 + y^2.$$

In allen Fällen kann also v leicht construirt werden.

§. 95.

Auf einem Durchmesser einer Parabel Fig. 22 oder Fig. 23 nehme man zu entgegengesetzten Seiten vom Scheitelpunkt S, und in gleichen Entfernungen von demselben zwei Punkte P und P'. Solche Punkte heißen Pole der Parabel, auch jeder von den Punkten der Pol des anderen. Wird durch den einen Pol eine unendliche gerade Linie gedacht, parallel mit der Tangente im Scheitel S, so heißt jene Linie Polare des anderen Pols, und dieser der Pol jener Polare.

Die Polare des äußeren Pols ist Secante der Parabel und die Sehne, welche sich von ihr abschneidet, ist durch den Durchmesser halbirt. Die Punkte A und B, in welchen diese Polare die Parabel schneidet, sind die Berührungspunkte der Tangenten, welche aus dem Pol an die Parabel sich legen lassen; denn in Bezug auf die conjugirten Achsen des Punktes S ist PP' die Subtangente der Punkte A und B, nach §. 92.

§. 96.

Durch den Pol P Fig. 22 oder Fig. 23 denke man eine Secante für die Parabel und die Punkte, in welchen sie die Parabel schneidet, seien C und D. Durch den einen der Punkte, C oder D, und durch S lege man eine gerade Linie, durch den anderen, D oder C einen Durchmesser. Der Punkt, in welchem diese Linie und dieser Durchmesser sich schneiden, befindet sich auf der Polare.

Wir legen die conjugirten Achsen des Punktes S zu Grunde. Die Gleichung der Parabel sei

$$1) \quad y^2 = p'x.$$

Die Abscisse des Punktes P sei x', die Gleichung seiner Polare ist alsdann

$$2)\quad x = -x'$$

die Gleichung der durch P zu denkenden Secante hat die Form

$$3)\quad y = cx - cx'$$

Die Coordinaten x'', y'' der Punkte C und D, in welchen die Secante die Parabel schneidet, werden erhalten, wenn man x und y aus den Gleichungen 1) und 3) entwickelt, und es entsteht (§. 79.):

$$x'' = \frac{p' + 2c^2x' \pm \sqrt{(p' + 4c^2x')p'}}{2c^2}$$

$$y'' = \frac{p' \pm \sqrt{(p' + 4c^2x')p'}}{2c}.$$

Die oberen Vorzeichen gewähren den einen, die unteren den anderen der beiden Punkte C und D. Die Gleichung der Linie CS, oder DS, ist

$$y = \frac{y''}{x''}x$$

oder die Werthe gesetzt

$$4)\quad y = \frac{p' \pm \sqrt{(p' + 4c^2x')p'}}{p' + 2c^2x' \pm \sqrt{(p' + 4c^2x')p'}}cx$$

und die Gleichung des durch D oder C gehenden Durchmessers ist dann

$$5)\quad y = \frac{p' \mp \sqrt{(p' + 4c^2x')p'}}{2c}.$$

Die Ascisse des Punktes, in welchem die Linien 4) und 5) sich schneiden, wird erhalten, wenn man x aus den Gleichungen 4) und 5) entwickelt. Indem man die Werthe für y gleich setzt, entsteht

$$x = \frac{p' \mp \sqrt{(p' + 4c^2x')p'}}{2c^2} \cdot \frac{p' + 2c^2x' \pm \sqrt{(p' + 4c^2x')p'}}{p' \pm \sqrt{(p' + 4c^2x')p'}}$$

$$= \frac{(p' + 2c^2x' \mp \sqrt{(p' + 4c^2x')p'})(p' + 2c^2x' \pm \sqrt{(p' + 4c^2x')p'})}{-4c^4x'}$$

oder

$$x = -x'.$$

Demnach befindet sich wegen 2) der Durchschnittspunkt der gedachten Linien in der Polare, und das ist das Gesetz.

§. 97.

1) Jede durch einen Pol P Fig. 22 oder Fig. 23 gelegte Secante CD einer Parabel wird durch die Parabel, den Pol und die Polare harmonisch getheilt.

Man ziehe die Linie DS und den Durchmesser CV. Der Durchschnittspunkt V dieser Linien befindet sich nach dem vorigen Paragraph auf der Polare. Man ziehe noch PV. Da S die Mitte ist von PP′ und VC parallel PP′, so sind die vier durch V gehenden Linien harmonische Strahlen, und die Punkte C, D, Q, P harmonische Punkte.

2) Wenn man Fig. 24 und Fig. 25 durch einen Punkt P zwei Secanten für eine Parabel zieht, ihre Durchschnittspunkte A, B, C, D als Eckpunkte eines vollständigen Vierecks ABCDEF betrachtet, und jene Secanten als zwei Diagonalen desselben, so ist die dritte Diagonale EF die Polare des Punktes P.

Die Diagonalen PB und PD sind harmonisch getheilt. Die Polare liefert zu den Punkten A, B, P und C, D, P dieselben vierten harmonischen Punkte N und Q, deshalb ist EF die Polare.

3) Legt man Fig. 24 oder Fig. 25 durch einen Punkt P beliebig viele Secanten AB, CD, GH..., so befinden sich die Durchschnittspunkte der Transversalen AC und BD, AD und BC, AG und BH, AH und BG, CG und DH, CH und DG,.... in gerader Linie, nämlich auf der Polare des Punktes P.

§. 98.

Werden Fig. 26 oder Fig. 27 zu sämmtlichen Punkten einer geraden Linie EF die Polaren gedacht, so schneiden sich diese in einem Punkt, nämlich in dem Pol P jener Linie EF.

Wir legen die Hauptachsen zu Grunde. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = px$, die Coordinaten des Punktes P seien x' und y'. Die Abscisse x'' des Punktes S ergiebt sich aus der Gleichung $y'^2 = px''$, also ist

$$x'' = \frac{y'^2}{p}.$$

Die Abscisse x''' des Pols P′ ist, wie leicht erhellet, gleich $-x' + 2x''$ folglich hat man

$$x''' = -x' + \frac{2y'^2}{p}.$$

Die Gleichung der Polare EF ist

$$\frac{y-y'}{x-x'''}=\frac{p}{2y'}$$

oder, wenn man für x''' den Werth setzt

$$1)\quad 2yy'=p(x+x').$$

Die Abscisse irgend eines Punktes der Polare sei x°, und es ist aus 1) seine Ordinate gleich $\frac{p(x^\circ+x')}{2y'}$, und die Gleichung der Polare dieses Punktes ist, wiederum nach 1),

$$2y\frac{p(x^\circ+x')}{2y'}=p(x+x^\circ)$$

oder
$$2)\quad \frac{y}{y'}=\frac{x+x^\circ}{x'+x^\circ}.$$

Die Abscisse des Punktes, in welchem diese Polare 2) den Durchmesser PS schneidet, ist der Werth von x, für welchen y gleich y' ist, und das ist offenbar x'. Demnach geht die Polare 2) durch den Pol P, und darin liegt der Satz.

Uebrigens hätte sich dies Gesetz eben so beweisen lassen wie das entsprechende in §. 255. der vierten Auflage des ersten Theils.

§. 99. Aufgabe.

Es ist, Fig. 28, eine gerade Linie AB und ein Punkt F gegeben; man soll den geometrischen Ort der Punkte bestimmen, welche von der Linie AB und von dem Punkt F gleich weit entfernt sind.

Auflösung. Durch F lege man die Linie BN normal auf AB. Die Entfernung FB des Punktes von der Linie sei a. Die Mitte O von FB ist ein Punkt des verlangten geometrischen Ortes. O diene als Anfangspunkt der Coordinaten. P sei irgend ein zweiter Punkt, dessen Entfernung PF von F gleich sei seiner Entfernung PA von AB. Es kommt darauf an, eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y des Punktes P, der jeden zweiten Punkt des verlangten geometrischen Ortes repräsentirt, herzuleiten. Da OF gleich $\frac{a}{2}$ ist, folgt leicht

$$PF^2=y^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

und es ist PA = NB = $x + \frac{a}{2}$, dabei PF = PA; hieraus entspringt die Gleichung

$$y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

oder

$$y^2 = 2ax.$$

Der verlangte geometrische Ort ist also eine Parabel, deren Scheitelpunkt O und deren Parameter das Doppelte ist der Entfernung des Punktes F von der geraden Linie AB.

§. 100.

Ist, Fig. 28, eine Parabel $y^2 = px$ gegeben, auf der Achse OF gleich OB gleich $\frac{1}{4}p$ genommen, und BA normal zur Achse gedacht, so ist jeder Punkt der Parabel gleich weit von dem Punkte F und von der Linie AB entfernt, welches leicht aus dem vorigen Paragraphen erhellet.

Der Punkt F heißt der Brennpunkt oder Focus, die Linie AB die Richtungslinie, Directrix der Parabel.

Brennpunkt und Richtungslinie sind Pol und Polare.

§. 101.

Die Entfernung eines Punktes P der Parabel vom Brennpunkt ist $x + \frac{1}{4}p$, unter x die Abscisse des Punktes P verstanden.

Denn es ist, Fig. 28, PF = PA = NO + OB = $x + \frac{1}{4}p$.

§. 102.

Die Ordinate im Brennpunkt ist gleich $\frac{1}{2}p$.

Denn die Abscisse OF des Brennpunktes (Fig. 28) ist $\frac{1}{4}p$, daher nach dem vorigen Paragraph FG = $\frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p = \frac{1}{2}p$.

Die Linie GH, welche durch den Brennpunkt geht und normal auf der Achse steht, ist daher gleich p. Sie heißt der Parameter, auch Hauptparameter der Parabel.

§. 103.

1) Ist, Fig. 28, PC Tangente für den Punkt P, F der Brennpunkt, so ist FC gleich FP.

Denn es ist OC = x und OF = $\frac{1}{4}p$, also FC = $x + \frac{1}{4}p$, und FP ist ebenfalls $x + \frac{1}{4}p$.

2) Die Tangente PC halbirt den Winkel APF, welchen der Durchmesser AP und die Linie FP bilden.

Denn APC ist als Wechselwinkel gleich PCF, und FPC ist gleich PCF, weil FP gleich FC.

3) Wenn man daher AP verlängert, so ist ∠DPE gleich ∠CPF, d. h. wenn man für irgend einen Punkt der Parabel eine Tangente denkt, durch denselben Punkt einen Durchmesser legt, und eine Linie nach dem Brennpunkte zieht, so bilden beide Linien mit der Tangente gleiche Winkel.

Dieser Satz hat ein physikalisches Interesse. Trifft nämlich ein Lichtstrahl in der Richtung EP die Tangente, so wird er in der Richtung PF reflectirt, und umgekehrt. Der Punkt P liegt sowohl in der Tangente, als in der Parabel. Trifft also ein Lichtstrahl in der Richtung EP die Parabel, so wird er ebenfalls in der Richtung PF reflectirt, und umgekehrt. P stellt jeden Punkt der Parabel vor. Daher werden alle Lichtstrahlen, welche parallel der Achse in die Parabel fallen, dergestalt zurückgeworfen, daß sie sämmtlich durch den Brennpunkt gehen, (deshalb der Name). Ist der Brennpunkt ein leuchtender Punkt, so werden alle Lichtstrahlen, welche von ihm ausgehen und die Parabel treffen, parallel zur Achse reflectirt. — Man stelle sich vor, die Parabel werde um ihre Achse gedreht. Sie beschreibt dabei eine parabolische Fläche, für welche F Brennpunkt bleibt, und für welche dasselbe Gesetz gilt. In der Wirklichkeit ist eine solche Fläche, dem mathematischen Begriff genau entsprechend, nicht herstellbar. Eine physische parabolische Fläche würde daher Lichtstrahlen, welche parallel der Achse einfallen, nicht so zurückwerfen, daß sie genau durch den Brennpunkt gehen, sondern nur dergestalt, daß sie durch den mehr oder minder großen Raum gehen, welcher den Brennpunkt umgiebt. Eine physische parabolische Fläche hat also einen Brennraum, und dieser ist kleiner oder größer, je nachdem die Fläche mehr oder weniger sich der mathematischen Vollkommenheit nähert. Und befindet sich umgekehrt in diesem Brennraum ein leuchtender Körper, so werden die Lichtstrahlen, welche von ihm ausgehen und die Fläche treffen, im Allgemeinen parallel zur Achse reflectirt. Hierauf beruht die Anwendung von solchen Flächen zu Scheinwerfern bei Leuchtthürmen.

§. 104.

Die gerade Linie von irgend einem Punkt der Parabel nach dem Brennpunkt wird der Brennstrahl oder Leitstrahl dieses Punktes der Parabel genannt.

§. 105. Aufgabe.

Durch den Brennpunkt F, Fig. 28, ist eine Sehne PP′

gezogen, unter dem Winkel φ gegen die Achse geneigt, man soll die Länge dieser Sehne bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$PF = x + \tfrac{1}{4}p$$

und, wie leicht erhellet,

$$x = \tfrac{1}{4}p + PF \operatorname{Cos}\varphi.$$

Beides addirt, giebt

$$PF(1 - \operatorname{Cos}\varphi) = \tfrac{1}{2}p$$

oder

$$PF = \frac{p}{4 \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}^2}$$

Eben so folgt

$$P'F = \frac{p}{4 \operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}^2}$$

und wenn man beides addirt, entsteht

$$PP' = \frac{p}{\operatorname{Sin}\varphi^2}.$$

Hieraus erhellet, daß der Parameter, welcher zu conjugirten Achsen gehört, die durch den Brennpunkt gehende Sehne ist, welche mit den Ordinaten dieser Achsen parallel läuft; eben so, wie bei den Hauptachsen.

Für jede conjugirten Achsen ist die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt gleich dem vierten Theil des zugehörigen Parameters. — Für die Hauptachsen ist dies Gesetz bereits bekannt. Nun sei SM Durchmesser zu PP', so ist zu zeigen, daß $SF = \frac{1}{4}p'$ ist, unter p' den Parameter für diesen Durchmesser, als erste Achse, verstanden. Es ist

$$PM^2 = p'SM$$

oder, weil $PM = \frac{1}{2}p'$,

$$\tfrac{1}{4}p' = SM$$

und wenn man die Tangente in S denkt, folgt leicht, daß $FS = MS$ ist, also $SF = \frac{1}{4}p'$.

§. 106.

Es sei, Fig. 29, AB eine beliebige Sehne der Parabel, CD Durchmesser dieser Sehne; aus dem einen Endpunkt A der Sehne ist der Durchmesser AE gezogen, aus dem ande-

ren Endpunkte B die Linie BE parallel mit der Tangente in A, so daß also BE Ordinate für AE ist. Das Dreieck ABC ist dann der vierte Theil des Dreiecks ABE.

Man ziehe DH parallel BE; und es ist

$$\Delta ADH = \tfrac{1}{4}\Delta ABE$$

weil nämlich $AD = \tfrac{1}{2}AB$.

Es verhält sich

$$DH : BE = AD : AB = 1 : 2$$

und, wenn man CG parallel BE zieht, da CG = DH,

$$CG : BE = 1 : 2.$$

Nach §. 93. verhält sich

$$CG^2 : BE^2 = AG : AE$$

oder $$1 : 4 = AG : AE$$

folglich ist $$AG = \tfrac{1}{4}AE.$$

Es ist $$AH = \tfrac{1}{2}AE$$

also $$AG = GH = CD$$

deshalb $$\Delta AGC = \Delta CDA = \tfrac{1}{2}\Delta ABC$$

und $$\Delta AGC = \tfrac{1}{2}\Delta ADH$$

also endlich $$\Delta ABC = \Delta ADH = \tfrac{1}{4}\Delta ABE.$$

§. 107.

Der Inhalt des Dreiecks ABC, Fig. 29, sei Q. Man verfahre bei den Sehnen AC und BC wie im vorigen Paragraphen bei der Sehne AB, und es folgt, daß $\Delta ACK = \tfrac{1}{4}\Delta ACD$, und $\Delta BCL = \tfrac{1}{4}\Delta BCD$, also überhaupt

$$\Delta ACK + \Delta BCL = \tfrac{1}{4}ABC = \tfrac{1}{4}Q$$

ist. Verfährt man bei den Sehnen AK, KC, CL, LB in gleicher Weise, und es entstehen vier neue Dreiecke, deren Summe den vierten Theil der Dreiecke ACK und BCL, also $\tfrac{1}{16}Q$ ausmacht. Dies Verfahren denke man ohne Ende fortgesetzt, und es folgt, daß der Parabelabschnitt ACB gleich ist

$$Q + \tfrac{1}{4}Q + \tfrac{1}{16}Q + \ldots \text{ ohne Ende}$$

und die Summe dieser Reihe ist

$$\tfrac{4}{3}Q.$$

Der Abschnitt, welchen die zur Achse normale Sehne AB, Fig. 30, abschneidet, ist daher $\tfrac{4}{3}xy$.

§. 108. Aufgabe.

Man soll Punkte einer Parabel construiren, deren Parameter p gegeben ist.

Auflösung. Eine beliebige gerade Linie ON, Fig. 31, nehme man als Achse, in ihr den beliebigen Punkt O als Scheitelpunkt der Parabel. Man nehme $OF = OG = \frac{1}{4}p$. In dem beliebigen Punkt N errichte man die Normale PP', nehme GN in den Zirkel, und schneide damit von F aus die Normale in P und P', so sind P und P' Punkte der Parabel. Es ist nämlich F Brennpunkt, und $FP = GN = ON + OG = x + \frac{1}{4}p$. Eine zweite in M errichtete Normale liefert zwei neue Punkte der Parabel u. s. f.

In dieser Weise lassen sich so viele Punkte der Parabel erzielen, als nöthig sind, durch sie aus freier Hand die Parabel zu zeichnen.

§. 109.

Fig. 32 zeigt, wie nach demselben Prinzip eine Parabel in mechanischer Weise stetig gezeichnet werden kann. Die Linie OX ist die Achse, $OF = OG = \frac{1}{4}p$, also O Scheitelpunkt, F Brennpunkt, G der Punkt, in welchem die Richtungslinie die Achse schneidet. AG ist ein Lineal, dessen Kante AG sich in der Richtungslinie befindet. Eine Schnur FPB ist im Brennpunkt F befestigt und in dem Punkte B des Winkels. Der Theil der Schnur, welcher zwischen B und F sich befindet, ist gleich der Kante AB des Winkels. Wird der Winkel in der Lage, welche die Figur zeigt, längs der Kante AG des Lineals bewegt, während die Schnur durch einen Stift P beständig einerseits an dem Winkel, andererseits in Spannung erhalten wird, so beschreibt der Stift P die Parabel. Es ist nämlich immer $PF = PA = x + \frac{1}{4}p$.

§. 110. Aufgabe.

Es ist, Fig. 28, eine Parabel gegeben, in ihr ein Punkt P, und man soll die Tangente für den Punkt P construiren.

Auflösung. Man fälle die Ordinate PN, nehme OC gleich ON, und ziehe CP. Dies ist die Tangente. Oder man ziehe den Brennstrahl PF, nehme FC gleich FP, und ziehe CP. Oder man ziehe den Brennstrahl PF, lege durch P die Linie PA parallel zur Achse, und halbire den Winkel APF, oder den Winkel RPE.

§. 111. Aufgabe.

Es ist eine Parabel gegeben und eine gerade Linie; man

soll eine Tangente für die Parabel construiren, welche mit der geraden Linie parallel ist.

Auflösung. Man ziehe irgend eine Sehne parallel der geraden Linie, und construire den Durchmesser dieser Sehne; der Scheitel des Durchmessers ist der Berührungspunkt der verlangten Tangente.

§. 112. Aufgabe.

Es ist eine Parabel gegeben und eine gerade Linie; man soll eine Tangente für die Parabel construiren, welche mit der geraden Linie einen gegeben Winkel α bildet.

Auflösung. Man zeichne eine Sehne, welche mit der gegebenen geraden Linie den Winkel α bildet, und construire eine Tangente parallel mit dieser Sehne.

§. 113. Aufgabe.

Es ist eine Parabel gegeben, und außerhalb derselben ein Punkt P, man soll von dem Punkte P aus die Tangenten an die Parabel legen.

Erste Auflösung. Es sei Fig. 33 F der Brennpunkt, BG die Richtungslinie. Man nehme an, PN sei die verlangte Tangente, ziehe den Brennstrahl NF, und die Linie NA parallel zur Achse. Dann ist NF gleich NA, und Winkel ANF halbirt. Man denke PF und PA, und es sind die Dreiecke ANP und FNP congruent, weil sie zwei Seiten beziehlich gleich haben, und die von diesen gebildeten Winkel bei N. Deshalb ist PA gleich PF. Hiernach folgende Construction: Von P aus beschreibe man mit der Zirkelöffnung PF den Bogen FAB, und ziehe AN parallel zur Achse, so ist N Berührungspunkt. Der Berührungspunkt einer zweiten Tangente wird erhalten, wenn man von B aus eine Parallele zur Achse zieht, bis zum Durchschnitt mit der Parabel.

Andere Auflösung. Man lege Fig. 24 durch P zwei beliebige Secanten PB, PD, ziehe die Transversalen AD, BC, AC, BD, und durch deren Durchschnittspunkte die gerade Linie EF; die Punkte T und T′, in welchen diese die Parabel schneidet, sind die Berührungspunkte der verlangten Tangenten. Es ist nämlich EF die Polare des Punktes P.

Bei dieser Construction bedarf man des Zirkels nicht.

Auch auf §. 94. läßt sich eine Auflösung gründen.

§. 114. Aufgabe.

Es ist, Fig. 28, eine Parabel gegeben, in ihr ein Punkt P, man soll die Normale für den Punkt P construiren.

Auflösung. Man fälle die Ordinate PN, nehme NQ gleich $\frac{1}{2}$p, und ziehe QP: dies ist die Normale. Oder man construire die Tangente für den Punkt P, und in P eine Normale zur Tangente. Oder man lege durch P den Brennstrahl FR, und die Linie AE parallel zur Achse, und halbire einen der Winkel APR oder FPE.

§. 115. Aufgabe.

Es ist eine Parabel gegeben und eine gerade Linie AB, und man soll eine Normale für die Parabel construiren, welche der Linie AB parallel ist.

Auflösung. Nach §. 112. construire man die Tangente der Parabel, welche normal steht auf der Linie AB, und errichte auf der Tangente in dem Berührungspunkt eine Normale. Sie ist die verlangte.

§. 116. Aufgabe.

Es ist eine Parabel gegeben und eine gerade Linie AB, und man soll eine Normale für die Parabel construiren, welche mit der Linie AB den Winkel α bildet.

Auflösung. Man construire nach §. 112. eine Tangente für die Parabel, welche mit der Linie AB den Winkel $90° - \alpha$ bildet, und errichte auf der Tangente im Berührungspunkt eine Normale.

§. 117. Aufgabe.

Es ist eine Parabel gegeben, man soll die Achse finden.

Auflösung. Man ziehe zwei parallele Sehnen, und lege durch die Mitten derselben eine gerade Linie; diese ist ein Durchmesser. Man construire weiter eine Sehne, welche normal auf dem Durchmesser steht, und durch die Mitte dieser letzten Sehne eine Linie parallel zum Durchmesser: diese ist die Achse.

§. 118. Aufgabe.

Es ist eine Parabel gegeben, man soll den Brennpunkt finden.

Auflösung. Man construire, Fig. 28, für irgend einen Punkt P der Parabel die Tangente PC, und errichte in der Mitte L von PC eine Normale. Der Durchschnitt F dieser Normale mit der Achse ist der Brennpunkt. Oder man errichte auf der Tangente im Berührungspunkte P eine Normale PQ, so ist NQ gleich $\frac{1}{2}$p, und wenn man OF gleich $\frac{1}{2}$NQ nimmt, so ist F der Brennpunkt.

II. Von der Ellipse.

§. 119.

Die Linie, deren Gleichung ist

$$y^2 = px - qx^2$$

heißt eine Ellipse.

§. 120.

Wir ermitteln zuvörderst die Gestalt der Curve. Es ist

$$y = \pm\sqrt{px - qx^2}.$$

Für negative Werthe von x ist y stets imaginair. Die Curve liegt also rechts von der Ordinatenachse. Für solche Werthe von x, welche y überhaupt reell werden lassen, nimmt y zwei in absoluter Hinsicht gleiche, aber entgegengesetzte Werthe an. Die Curve liegt demnach zum Theil oberhalb, zum Theil unterhalb der ersten Achse, und der oberhalb liegende Theil ist dem unteren congruent.

Für $x = 0$ wird y zu Null; und die Curve schneidet die erste Achse im Anfangspunkt der Coordinaten. Aus $px - qx^2 = 0$ folgt, daß y nochmals zu Null wird für $x = \frac{p}{q}$. Ist also, Fig. 34, O der Anfangspunkt der Coordinaten, OX die erste Achse, und $ON = \frac{p}{q}$, so wird die erste Achse auch in N von der Curve getroffen. Es entsteht die Frage, ob die Curve zwischen O und N überall reell sei, und ob sie über N hinaus fortschreite. Es sei

$$x < \frac{p}{q}$$

so folgt

$$qx < p$$
$$qx^2 < px.$$

Daraus erhellet, daß für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und $\frac{p}{q}$ liegen, y reell, die Curve also zwischen O und N nicht unterbrochen ist. Setzen wir dagegen

$$x > \frac{p}{q}$$

so folgt

$$qx^2 > px.$$

Für Werthe von x, welche größer als $\frac{p}{q}$ sind, wird also y imaginair, und deshalb erstreckt sich die Curve nicht über N hinaus. Nach dem Bisherigen liegt die Curve über ON, und sie schließt sich.

Wir setzen die größte Abscisse $\frac{p}{q}$ gleich 2a, nehmen OM gleich a, dann ist M die Mitte von ON, und setzen $a \pm z$ statt x. Dadurch werden wir zu Ordinaten geführt, welche zu verschiedenen Seiten und gleich weit von M entfernt liegen. Es entsteht

$$y = \pm \sqrt{p(a \pm z) - q(a \pm z)^2}.$$

Aus $\frac{p}{q} = 2a$ folgt $p = 2aq$, und wenn man diesen Werth substituirt, entsteht weiter

$$y = \pm \sqrt{q(a^2 - z^2)}.$$

Es ergeben sich demnach dieselben Werthe für y, gleichviel, ob man $a + z$ oder $a - z$ für x setzt. Hieraus erhellet, daß eine in M auf der ersten Achse errichtete Normale CD die Curve in zwei congruente Theile zerlegt. Oben ist bereits dasselbe für die erste Achse bemerkt. Die Curve besteht daher aus vier congruenten Theilen.

Die Ordinate $y = \pm \sqrt{q(a^2 - z^2)}$ gewinnt ihren größten Werth, wenn z Null ist; die größte Ordinate ist daher die in der Mitte M von ON. Für kleinere Werthe von z nimmt y langsamer ab, für größere rascher; daraus erhellet, daß die Curve in den Gegenden C und D weniger, später stärker gekrümmt ist.

§. 121.

Die Linien ON und CD nennt man die **große** und **kleine Achse** der Ellipse, die **Hauptachsen**, ihren Durchschnittspunkt M den **Mittelpunkt** der Ellipse.

Diese Linien sind zur Bestimmung der Ellipse am geeignetsten, und man bedient sich ihrer als Parameter. Um sie in die Gleichung einzuführen, setzen wir OM gleich a, CM gleich b. Nach dem vorigen Paragraph ist

$$1)\quad a = \frac{p}{2q}$$

und es findet sich

$$2)\quad b^2 = \frac{p^2}{4q}$$

wenn man in $y^2 = px - qx^2$ statt x den Werth $\frac{p}{2q}$ setzt, wobei y in b übergeht. Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt weiter

$$3)\quad p = \frac{2b^2}{a}$$

$$4)\quad q = \frac{b^2}{a^2}.$$

Diese Werthe, in $y^2 = px - qx^2$ substituirt, liefern

$$\text{I.}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

als Gleichung der Ellipse, während O Anfangspunkt der Coordinaten ist, und die halbe große und halbe kleine Achse als Parameter eingeführt sind.

Die Gleichung vereinfacht sich, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Mittelpunkt verlegt. Zu dem Ende werde nach Anleitung des §. 60. $a + x$ statt x gesetzt, oder, einfacher, x statt z im vorigen Paragraph, und es entsteht

$$\text{II.}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

oder

$$\text{III.}\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

oder

$$\text{IV.}\quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Wenn b gleich a ist, gehen die Gleichungen der Ellipse in die des Kreises über. Der Kreis ist daher ein besonderer Fall der Ellipse.

Man übersehe nicht, daß es eine bloße Willkür ist, CD kleiner anzunehmen als ON, d. h. $\sqrt{\frac{p^2}{4q}} < \frac{p}{2q}$. Es kann eben sowohl der letzte Ausdruck kleiner sein als der erstere. Im letzten Fall würde ON kleine Achse, CD große geworden sein; und hätten wir dann, wie es üblich ist, wieder die halbe große Achse durch a, die halbe kleine durch b bezeichnet, so würden in den Gleichungen I bis IV die Buchstaben a und b verwechselt erscheinen.

Setzen wir

$$\sqrt{\frac{p^2}{4q}} \lesseqgtr \frac{p}{2q}$$

so folgt

$$q \lesseqgtr 1$$

und hiernach ist leicht zu entscheiden, ob die Abscisse ON große oder kleine Achse, oder die Ellipse ein Kreis sei.

In der Folge werden wir uns hauptsächlich der Gleichung III bedienen.

§. 122.

Die Ellipse geht in die Parabel über, wenn die große Achse unendlich wird.

Die Gleichung der Ellipse sei

$$y^2 = px - qx^2.$$

Die große Achse drückt sich nach dem vorigen Paragraphen durch einen Quotienten aus, dessen Nenner q ist. Läßt man q abnehmen bis auf Null, so wächst die große Achse bis ∞. Wenn aber q Null geworden, reducirt sich die Gleichung auf

$$y^2 = px$$

und dies ist die der Parabel.

§. 123.

Wir denken eine Ellipse

$$1) \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

und eine gerade Linie

$$2) \quad y = px + q$$

und ermitteln die Bedingungen, unter welchen beide Linien keinen Punkt gemein haben, sich schneiden oder berühren.

Es kommt zunächst darauf an, zu entscheiden, unter welchen Bedingungen die Linien Punkte gemeinschaftlich haben oder nicht. Dies hängt davon ab, ob es reelle Werthe von x und y giebt, die gleichzeitig den Gleichungen beider Linien entsprechen. Wir entwickeln x und y aus den Gleichungen 1) und 2) und erhalten

$$3) \quad x = \frac{-a^2pq \pm ab\sqrt{a^2p^2 + b^2 - q^2}}{a^2p^2 + b^2}$$

$$4) \quad y = \frac{b^2 q \pm abp\sqrt{a^2p^2 + b^2 - q^2}}{a^2p^2 + b^2}.$$

Der Nenner dieser Ausdrücke kann nicht Null sein, denn aus $a^2p^2 + b^2 = 0$ würde folgen $p = \sqrt{-\frac{b^2}{a^2}}$, und das ist nicht möglich, so lange die Coefficienten p, a, b reelle Werthe vorstellen. Wir dürfen daher nur unterscheiden, ob

$$a^2p^2 + b^2 - q^2 < 0$$

$$a^2p^2 + b^2 - q^2 > 0$$

oder

$$a^2p^2 + b^2 - q^2 = 0$$

ist. Im ersten Fall sind die Auflösungen 3) und 4) imaginair, und die Ellipse und die gerade Linie haben keinen Punkt gemeinschaftlich. Im zweiten Fall liefern die Auflösungen 3) und 4) zwei Paare reeller Werthe von x und y, welche gleichzeitig den Gleichungen 1) und 2) genügen, und die Linien haben zwei Punkte gemein. Im dritten Fall verschwinden die Wurzeln, es giebt ein Paar reeller Werthe von x und y, die den Gleichungen 1) und 2) entsprechen, und die Ellipse hat mit der geraden Linie einen Punkt gemeinschaftlich. Indem man q sich ändern läßt, folgt durch Betrachtungen, gleich denen in §. 79., daß im zweiten Fall die Ellipse und die gerade Linie sich in den beiden ihnen gemeinschaftlichen Punkten schneiden, im dritten Fall sich in dem gemeinschaftlichen Punkt berühren.

§. 124.

Wenn $q = 0$ ist, also die gerade Linie durch den Mittelpunkt geht, fallen die beiden Werthe von x in absoluter Hinsicht einander gleich aus, auch die beiden Werthe von y. Vermittelst §. 13. folgt dann, daß die Sehne durch den Mittelpunkt der Ellipse halbirt ist.

Deshalb ist **jede** Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, durch diesen in zwei gleiche Theile getheilt.

Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne heißt ein **Durchmesser** der Ellipse.

§. 125. Aufgabe.

Es ist eine Ellipse durch ihre Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

gegeben, und ein Punkt Q durch seine Coordinaten x′ und y′,

man soll die Gleichung einer geraden Linie herleiten, welche durch den Punkt Q geht und die Ellipse berührt.

Auflösung. Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt Q geht, ist von der Form

$$1)\quad \frac{y-y'}{x-x'} = c$$

unter c einen beliebigen constanten Ausdruck verstanden. Es kommt darauf an, diesen so zu bestimmen, daß die gerade Linie Tangente der Ellipse werde.

Aus der Gleichung 1) folgt

$$y = cx-(cx'-y')$$

wofür wir setzen wollen

$$y = px+q.$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist die Linie Tangente der Ellipse, sobald

$$a^2p^2+b^2-q^2 = 0.$$

Das liefert für c die Bedingungsgleichung

$$a^2c^2+b^2-(cx'-y')^2 = 0$$

oder

$$c^2-\frac{2x'y'}{x'^2-a^2}c+\frac{y'^2-b^2}{x'^2-a^2} = 0$$

und daraus ist

$$c = \frac{x'y'\pm\sqrt{a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2}}{x'^2-a^2}.$$

Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt Q geht und die Ellipse berührt, ist daher

$$2)\quad \frac{y-y'}{x-x'} = \frac{x'y'\pm\sqrt{a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2}}{x'^2-a^2}$$

Man hat zu unterscheiden, ob

$$a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2 < 0$$

$$a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2 > 0$$

$$a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2 = 0$$

sei. Im ersten Fall befindet sich der Punkt Q innerhalb des von der Ellipse umschlossenen Raumes, die Wurzel ist imaginair, und es giebt keine gerade Linie, welche durch den Punkt Q geht und die Ellipse berührt. Im zweiten Fall liegt der Punkt Q außerhalb der Ellipse, die Wurzel ist reell und die

Gleichung 2) liefert zwei durch den Punkt Q gehende gerade Linien, welche Tangenten der Ellipse sind. Im dritten Fall befindet sich der Punkt Q in der Ellipse, die Wurzel verschwindet, die Gleichung 2) reducirt sich auf

$$3) \quad \frac{y - y'}{x - x'} = \frac{x'y'}{x'^2 - a^2}$$

und liefert eine gerade Linie, welche die Ellipse in dem Punkte Q berührt.

Den in 3) rechts stehenden Ausdruck multipliciren wir im Zähler und Nenner mit b^2 und es entsteht, mit Rücksicht auf die Gleichung der Ellipse,

$$\text{I.} \quad y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$$

oder, wenn man den Nenner beseitigt,

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2y'^2 + b^2x'^2$$

oder

$$\text{II.} \quad a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2.$$

§. 126. Aufgabe.

Es ist eine Ellipse, Fig. 35, gegeben durch ihre Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

in ihr einen Punkt P durch seine Abscisse x', für den Punkt wird die Tangente PQ der Ellipse gedacht, und man soll die Abscisse MQ des Durchschnittspunktes Q der Tangente mit der ersten Achse bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung der Tangente für den Punkt P ist nach II. im vorigen Paragraphen

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2.$$

Die Abscisse MQ des Durchschnittspunktes Q der Tangente mit der ersten Achse wird in dem x erhalten, für welches y Null ist. Und setzt man 0 statt y, so findet sich

$$x = MQ = \frac{a^2}{x'}.$$

Es folgt hieraus

$$xx' = a^2$$

d. h. das Product aus der Abscisse des Berührungspunktes in die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der ersten Achse ist constant, und gleich a^2.

§. 127. Aufgabe.

Es ist, Fig. 35, eine Ellipse durch ihre Gleichung

$$a^2y^2 + b'x^2 = a^2b^2$$

gegeben, in ihr ein Punkt P durch seine Abscisse x', man soll die Subtangente für diesen Punkt bestimmen.

Auflösung. Sie findet sich, indem man in der Gleichung I. §. 125. y gleich Null setzt und x — x' entwickelt (§. 83.), und es ergiebt sich für die Subtangente

$$\frac{a^2y'^2}{b^2x'}$$

oder, für den Zähler seinen Werth aus der Gleichung der Ellipse gesetzt

$$\frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

§. 128.

Die Subtangente hat sich unabhängig von der zweiten Hauptachse b der Ellipse ergeben. Wenn man daher über derselben ersten Hauptachse GH, Fig 35, beliebig viele Ellipsen denkt, deren zweite Hauptachsen verschieden sind, eine Abscisse x' wählt, und für die Punkte P, P' u. s. w., welche in den verschiedenen Ellipsen jener Abscisse x' entsprechen, sich die Tangenten vorstellt, so gehört zu allen dieselbe Subtangente SQ, und alle schneiden die erste Achse in demselben Punkt Q. Und wäre eine der gedachten Ellipsen GC'H ein Kreis, so würde dadurch keine Ausnahme herbeigeführt.

§. 129. Aufgabe.

Es ist eine Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

gegeben, in ihr ein Punkt P durch seine Abscisse x', man soll die Gleichung der Normale für diesen Punkt der Ellipse herleiten.

Auflösung. Die Gleichung der Tangente für den Punkt P ist nach §. 125. I.

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x').$$

Die Normale für den Punkt P der Ellipse steht rechtwinklig auf der Tangente in dem Berührungspunkte P. Daher ist nach §. 35. die Gleichung der Normale

$$\text{I.}\quad y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x')$$

oder

$$\text{II.}\quad b^2 x' y - a^2 y' x = (b^2 - a^2) x' y'.$$

§. 130. Aufgabe.

Es ist, Fig. 35, eine Ellipse gegeben durch ihre Gleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

in ihr ein Punkt P durch seine Abscisse x'; für den Punkt P wird die Normale PK gedacht, und man soll die Abscisse MK des Durchschnittspunktes der Normale mit der ersten Achse bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung der Normale ist nach dem vorigen Paragraph

$$b^2 x' y - a^2 y' x = (b^2 - a^2) x' y'.$$

Für den Werth Null von y liefert sie in x die Abscisse MK des Durchschnittspunktes der Normale mit der ersten Achse, nämlich

$$MK = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'.$$

§. 131. Aufgabe.

Es ist, Fig. 35, eine Ellipse durch ihre Gleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

gegeben, in ihr ein Punkt P durch seine Abscisse x', man soll die Subnormale dieses Punktes bestimmen.

Auflösung. Sie ergiebt sich, wenn man in der Gleichung I. des §. 129. y gleich Null setzt und $x - x'$ entwikkelt, und es entsteht für die Subnormale

$$-\frac{b^2}{a^2} x'.$$

§. 132.

Die Mitten paralleler Sehnen einer Ellipse befinden sich in einer geraden Linie, welche durch den Mittelpunkt geht.

Es sei

$$x^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

die Gleichung einer Ellipse,

$$y = px + q$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche die Ellipse schneidet.

Nach §. 123. sind die Coordinaten der Durchschnittspunkte beider Linien

$$y = \frac{b^2q \pm abp\sqrt{a^2p^2+b^2-q^2}}{a^2p^2+b^2}$$

$$x = \frac{-a^2pq \pm ab\sqrt{a^2p^2+b^2-q^2}}{a^2p^2+b^2}.$$

Die Coordinaten der Mitte der Sehne seien x' und y'. Nach §. 17. folgt

$$y' = \frac{b^2q}{a^2p^2+b^2}$$

$$x' = -\frac{a^2pq}{a^2p^2+b^2}$$

und, wenn man dividirt,

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{b^2}{a^2p}.$$

Dieser Quotient enthält nur p, nicht q. Er ist also bei allen Sehnen, welche parallel sind der Linie $y = px + q$ derselbe. Die Mitten solcher Sehnen bilden demnach die Linie

$$y = -\frac{b^2}{a^2p}x$$

und diese Linie ist gerade und geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten, der zugleich Mittelpunkt der Ellipse ist. Das ist der Satz.

§. 133.

I) Ist also

$$1)\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

die Gleichung einer Ellipse, und

$$2)\quad y = px + q$$

die Gleichung einer geraden Linie, so ist

$$3)\quad y = -\frac{b^2}{a^2p}x$$

die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Ellipse gehenden geraden Linie, welche alle Sehnen halbirt, die mit der Linie 2) parallel sind.

II) Und ist

$$4)\quad y = cx$$

irgend eine durch den Mittelpunkt der Ellipse gehende gerade Linie, so ist

$$5)\quad y = -\frac{b^2}{a^2c}x + q$$

die Gleichung, welche alle Sehnen liefert, die durch die Linie 4) halbirt werden, wenn man nämlich statt q alle Werthe gesetzt denkt, welche die Linie 5) zu einer solchen machen, die die Ellipse schneidet.

Denn ist

$$y = px + q$$

eine Sehne, welche durch die Linie 4) halbirt wird, so muß nach 1)

$$c = -\frac{b^2}{a^2p}$$

sein, und daraus folgt

$$p = -\frac{b^2}{a^2c}.$$

III) Es sei α der Winkel, welchen die Linie $y = cx$ mit der ersten Achse bildet. Dann ist $\mathrm{tg}\,\alpha = c$. Und bezeichnen x' und y' die Coordinaten eines Duchschnittspunktes dieser Linie mit der Ellipse, so ist $\frac{y'}{x'} = \mathrm{tg}\,\alpha = c$. Die Gleichung 5) erhält hierdurch die Gestalt

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x + q$$

und nun erhellet aus §. 125. I., daß die Tangenten für die Endpunkte der Sehne $y = cx$ parallel sind mit den Sehnen, welche durch jene halbirt werden.

IV) Für den Werth Null von q liefert die Gleichung 5) den Durchmesser

$$y = -\frac{b^2}{a^2c}x.$$

Die Sehnen, welche durch diesen Durchmesser halbirt werden, liefert nach II) die Gleichung

$$y = -\frac{b^2}{a^2\left(-\frac{b^2}{a^2c}\right)}x + q$$

oder

$$y = cx + q.$$

Diese Sehnen sind parallel mit der Linie 4).

Wenn also PQ irgend ein Durchmesser ist, und P′Q′ der Durchmesser, welcher parallel ist mit den Sehnen, die der erste Durchmesser halbirt, so sind die Sehnen, welche der letzte Durchmesser P′Q′ halbirt, parallel mit dem ersten Durchmesser PQ.

Zwei Durchmesser, von welchen jeder die Sehnen halbirt, die parallel mit dem anderen laufen, heißen **conjugirte Durchmesser**.

V) Sind

$$y = px$$

$$y = p'x$$

zwei conjugirte Durchmesser, so folgt nach dem Vorigen, daß

$$pp' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

§. 134. Aufgabe.

Es sind, Fig. 36, eine Ellipse gegeben durch ihre Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

und zwei conjugirte Durchmesser GH und G′H′ durch die Winkel α und α', welche sie mit der ersten Achse bilden. Man soll die Gleichung der Ellipse finden, während diese Durchmesser als Coordinatenachsen dienen.

Auflösung. Es sei P irgend ein Punkt der Ellipse, seine Coordinaten für die ursprünglichen Achsen seien x und y, seine Coordinaten für die neuen Coordinatenachsen x′ und y′. Es kommt darauf an, eine Gleichung zwischen x′ und y′ herzuleiten. Nun ist

$$1)\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

$$2)\quad x = x'\mathrm{Cos}\,\alpha + y'\mathrm{Cos}\,\alpha'$$

$$3)\quad y = x'\mathrm{Sin}\,\alpha + y'\mathrm{Sin}\,\alpha'.$$

Die Werthe aus 2) und 3) substituire man in 1); das liefert

$$4)\quad (a^2\mathrm{Sin}\,\alpha'^2 + b^2\mathrm{Cos}\,\alpha'^2)y'^2 + 2(a^2\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha'$$
$$+ b^2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha')x'y' + (a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2)x'^2 = a^2b^2.$$

Die Linien GH und G′H′ sind conjugirte Durchmesser, daher ist nach V) im vorigen Paragraph

$$pp' = -\frac{b^2}{a^2}$$

d. h.

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$$

und daraus folgt

$$a^2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \alpha' + b^2 \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' = 0.$$

Die Gleichung 4) geht deshalb über in

$$5) \; (a^2 \operatorname{Sin} \alpha'^2 + b^2 \operatorname{Cos} \alpha'^2) y'^2 + (a^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + b^2 \operatorname{Cos} \alpha^2) x'^2 = a^2 b^2$$

und dies ist, wenn man x' und y' als veränderlich ansieht, die Gleichung, welche herzuleiten war.

Der Gleichung läßt sich eine einfachere Gestalt dadurch geben, daß man die Hälften MG und M'G der conjugirten Durchmesser beziehlich gleich a' und b' setzt, und diese Werthe als Constante einführt.

In der Gleichung 5) wird für den Werth a' von x' die Ordinate y' zu Null, und für den Werth b' von y' wird x' zu Null. Daher folgt

$$a^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + b^2 \operatorname{Cos} \alpha^2 = \frac{a^2 b^2}{a'^2}$$

und

$$a^2 \operatorname{Sin} \alpha'^2 + b^2 \operatorname{Cos} \alpha'^2 = \frac{a^2 b^2}{b'^2}.$$

Diese Werthe, in 5) substituirt, lassen die Gleichung übergehen in

$$\frac{a^2 b^2}{b'^2} y'^2 + \frac{a^2 b^2}{a'^2} x'^2 = a^2 b^2$$

oder, wenn man hebt, die Nenner beseitigt, und die Marken bei x' und y' löscht

$$6) \quad a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2.$$

Die Gestalt der Gleichung der Ellipse ist also dieselbe, gleichviel, ob die Hälften zweier conjugirten Durchmesser oder die Hälften der Hauptachsen als Parameter dienen.

§. 135.

Die Resultate, welche wir vermittelst der Gleichung:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

hergeleitet haben, würden sich offenbar auch vermittelst der Gleichung

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$$

ergeben, und ihre Bedeutung ist leicht zu erkennen. So ist z. B. für conjugirte Durchmesser die Subtangente gleich $\frac{a'^2 - x'^2}{x'}$ im Sinne von §. 83., und $xx' = a'^2$ nach §. 126.; und

sind $y = px$ und $y = p'x$ zwei conjugirte Durchmesser, so ist $pp' = -\frac{b'^2}{a'^2}$.

§. 136.

Bezeichnen a und b die Hälften der Hauptachsen einer Ellipse, a' und b' die Hälften zweier conjugirten Durchmesser, und bilden diese den Winkel β, so ist jedesmal

$$\text{I.} \quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{II.} \quad a'b' \operatorname{Sin}\beta = ab.$$

Es seien, Fig. 37, GH und G'H' die conjugirten Durchmesser, x' und y' die Coordinaten des Punktes G, in welchem der erstere Durchmesser die Ellipse trifft. Die Gleichung des Durchmessers ist alsdann

$$1) \quad y = \frac{y'}{x'}x$$

und die Gleichung des zweiten Durchmessers G'H' nach §. 133

$$2) \quad y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x.$$

Wir bestimmen zuvörderst die Coordinaten der Durchschnittspunkte G' und H' des zweiten Durchmessers und der Ellipse. Sie ergeben sich, wenn man x und y aus den Gleichungen 2) und

$$3) \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

entwickelt. Den Werth von y aus 2) setze man in 3). Das liefert

$$(b^2x'^2 + a^2y'^2)x^2 = a^4y'^2.$$

Hieraus folgt, weil der Coefficient von x^2 gleich ist a^2b^2,

$$4) \quad x = \pm\frac{a}{b}y'$$

dann weiter vermittelst 2)

$$5) \quad y = \mp\frac{b}{a}x'.$$

Nun ist

$$a'^2 = x'^2 + y'^2$$

$$b'^2 = \frac{b^2}{a^2}x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2$$

folglich

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}x'^2 + \frac{a^2+b^2}{b^2}y'^2$$

$$= (a^2+b^2)\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right)$$

$$= a^2 + b^2$$

weil nämlich der letzte Faktor 1 ist, nach §. 121. IV. Das ist das Gesetz unter I.

Das zweite Gesetz zu erweisen, denken wir für den Punkt G die Tangente GD, fällen die Normalen GC und DE auf den Durchmesser G′H′, und die Normale G′K auf die erste Achse. Es ist alsdann

$$\text{Sin}\,\beta = \frac{GC}{a'} = \frac{DE}{a'},$$

und es verhält sich, da die Dreiecke MDE und MG′K ähnlich sind,

$$MD : DE = MG' : G'K$$

woraus folgt

$$DE = \frac{MD \,.\, G'K}{b'}.$$

Nach §. 126. ist $MD = \frac{a^2}{x'}$, und oben unter 5) hatte sich ergeben $G'K = \frac{b}{a}x'$. Substituirt man diese Werthe, so folgt

$$DE = \frac{ab}{b'}$$

dann weiter

$$\text{Sin}\,\beta = \frac{ab}{a'b'}$$

oder $$a'b'\,\text{Sin}\,\beta = ab.$$

Und das ist das zweite Gesetz.

§. 137.

Wenn man für die Endpunkte G, H, G′ und H′ irgend zweier conjugirten Durchmesser GH und G′H′, Fig. 37, Tangenten denkt, so bilden diese ein um die Ellipse liegendes Parallelogramm. Der Inhalt des Parallelogramms ist, wie leicht erhellet, $4a'b'\,\text{Sin}\,\beta$ oder $4ab$. Alle solchen Parallelogramme sind also von gleicher Größe.

§. 138.

Man stelle sich eine Ellipse vor, irgend einen Durchmesser derselben, und denke von einem beliebigen Punkte der Ellipse zwei gerade Linien nach den Endpunkten jenes Durchmessers gezogen: solche zwei Linien heißen Supplementar-Sehnen der Ellipse; und ist der Durchmesser die große Achse, so heißen die Linien Haupt-Supplementarsehnen.

§. 139.

Zwei Durchmesser, welche mit Supplementarsehnen parallel laufen, sind conjugirte Durchmesser.

Es sei die Gleichung der Ellipse, Fig. 37,

$$1)\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Der Durchmesser GH sei bestimmt durch die Coordinaten x' und y' des Punktes G. Die Coordinaten des anderen Endpunktes H sind $-x'$ und $-y'$. Der Punkt Q sei beliebig genommen; seine Coordinaten seien x'' und y''. Die Gleichungen der nach dem Punkt Q gehenden Supplementarsehnen GQ und HQ haben beziehlich die Formen

$$2)\quad y - y' = q(x - x')$$

$$3)\quad y + y' = q'(x + x').$$

Die Coefficienten q und q' bestimmen sich sehr einfach, indem man in 2) und 3) statt x und y die Coordinaten des Punktes Q denkt, und es folgt

$$4)\quad q = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

$$5)\quad q' = \frac{y'' + y'}{x'' + x'}.$$

Hiernach ist

$$6)\quad qq' = \frac{y''^2 - y'^2}{x''^2 - x'^2}.$$

Es ist aber auch, weil Q und G in der Ellipse liegen,

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2$$

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$$

folglich

$$a^2(y''^2 - y'^2) + b^2(x''^2 - x'^2) = 0$$

oder

$$7)\quad \frac{y''^2 - y'^2}{x''^2 - x'^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Aus 6) und 7) ergiebt sich jetzt

$$8)\quad qq' = -\frac{b^2}{a^2}$$

oder

$$9)\quad q' = -\frac{b^2}{a^2 q}.$$

Und die Gleichungen der beiden Supplementarsehnen GQ und HQ lassen sich beziehlich unter nachstehender Form geben:

$$10)\quad y - y' = q(x - x')$$

$$11)\quad y + y' = -\frac{b^2}{a^2 q}(x + x').$$

Die Gleichung des mit der Sehne GQ parallelen Durchmessers ist

$$y = qx$$

die seines conjugirten Durchmessers nach §. 133

$$y = -\frac{b^2}{a^2 q}x$$

der letzte ist also parallel mit der Sehne QH. Und darin liegt der Satz.

§. 140.

Für irgend einen Punkt G einer Ellipse, Fig. 37, werde die Tangente gedacht. Die Durchschnittspunkte derselben mit der großen und mit der kleinen Achse seien beziehlich D und V. Der mit der Tangente parallele Durchmesser G'H' sei gleich 2b'. Es ist jedesmal

$$GD \,.\, GV = b'^2.$$

Man denke noch den Durchmesser GH. Die Durchmesser GH und G'H' sind conjugirte Durchmesser; und es sei GH gleich 2a'. — Die conjugirten Durchmesser nehme man als Coordinatenachsen. Die Gleichung der großen Achse sei

$$1)\quad y = cx$$

die der kleinen ist alsdann nach §. 135

$$2)\quad y = -\frac{b'^2}{a'^2 c}x.$$

Setzt man in 1) a' statt x, so wird y zu GD, und setzt man in 2) a' statt x, so wird y zu DV. Also ist

$$GD = ca'$$

$$GV = -\frac{b^2}{a'^2c}a'$$

und hieraus folgt

$$GD.GV = -b'^2$$

oder, wenn wir die entgegengesetzte Lage der Stücke GD und GV nicht berücksichtigen,

$$GD.GV = b'^2.$$

§. 141.

Man denke eine Ellipse, und aus einem beliebigen Punkt Q zwei Secanten. C und D seien die Punkte, in welchen die eine Secante die Ellipse schneidet, C' und D' die Durchschnittspunkte der anderen. Die mit den Secanten CD und C'D' parallelen Durchmesser seien beziehlich 2d und 2d'. Alsdann verhält sich

$$QC.QD : QC'.QD' = d^2 : d'^2.$$

Die Gleichung der Ellipse sei

$$1) \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Die Gleichungen der Secanten CD und C'D' seien beziehlich

$$2) \quad y = px + q$$

$$3) \quad y = p'x + q'.$$

Man betrachte die Secanten als Coordinatenachsen, CD als erste, also C'D' als zweite. Um die Gleichung der Ellipse für diese Coordinatenachsen zu erhalten, ist nach §. 62. in 1) statt y ein Ausdruck von der Form

$$mx + ny + v$$

zu setzen, eben so statt x ein Ausdruck

$$m'x + n'y + v'$$

und in diesen Ausdrücken sind m und m' bloß von p abhängig, n und n' bloß von p', v und v' aber von p, q, p', q'. Die neue Gleichung der Ellipse erhält die Form

$$Ay^2 + \dots + Bx^2 + \dots + V = 0$$

und es sind A und B bloß abhängig von p' und p, v von p, q, p', q'.

Für x = 0 wird in dieser Gleichung y zu QC' und QD'. Das Product beider Werthe von y macht aber nach der Theorie der quadratischen Gleichungen $\frac{V}{A}$ aus. Demnach ist

$$QC'.QD' = \frac{V}{A}.$$

Eben so ist, für $y = 0$

$$QC.QD = \frac{V}{B}$$

folglich

$$QC.QD : QC'.QD' = A : B.$$

Der Quotient $A : B$ ist unabhängig von q und q', also derselbe für alle mit CD und $C'D'$ parallelen Secanten. Man betrachte nun den Mittelpunkt als den Punkt Q, und die Durchmesser $2d$ und $2d'$ als Secanten, so ist

$$d^2 : d'^2 = A : B$$

folglich

$$QC.QD : QC'.QD' = d^2 : d'^2$$

und das ist der Satz.

Durch eine Rechnung ähnlich der im §. 94. findet man

$$QC.QD = (a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2)\frac{1}{a^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 + b^2 \operatorname{Cos}\alpha^2}$$

$$= \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}{a^2b^2}\,d^2$$

woraus das Gesetz gleichfalls erhellet.

Nach dem Gesetz verhalten sich die Tangenten, welche aus einem Punkt an eine Ellipse sich legen lassen, wie die damit parallelen Durchmesser; es liefert unmittelbar die Gleichung der Ellipse für conjugirte Durchmesser, u. s. w.

§. 142. Aufgabe.

Es ist, Fig. 38 oder 39, eine Ellipse gegeben und ein beliebiger Durchmesser AB gleich $2a'$. Auf dem Durchmesser ist ein Punkt P durch seine Abscisse MP gleich x' gegeben, und man soll die Abscisse MQ, gleich x, des Punktes Q bestimmen, welcher der vierte harmonische Punkt ist zu den drei Punkten A, B, und P.

Auflösung. Es muß sich verhalten

$$PB : BQ = PA : QA$$

oder, wegen §. 6

$$-x' + a' : -a' + x = -x' - a' : -x - a'.$$

Hieraus folgt

$$1)\quad xx' = a'^2$$

also
$$2)\quad x = \frac{a'^2}{x'}.$$

§. 143.

1) Zwei Punkte P und Q, Fig. 38 oder 39, welche auf einem Durchmesser einer Ellipse sich befinden, und welche mit den beiden Punkten A und B, in denen der Durchmesser die Ellipse schneidet, vier harmonische Punkte ausmachen, heißen Pole der Ellipse, und jeder ist der Pol des anderen.

Durch den einen der Pole Q oder P denke man eine unendliche gerade Linie parallel mit den Tangenten in A und B, oder, was dasselbe ist, parallel mit dem zu AB conjugirten Durchmesser; die gedachte Linie heißt die Polare des anderen Punktes P oder Q, und dieser dann der Pol der Polare.

2) Ist $2a'$ der Durchmesser, auf welchem zwei Pole sich befinden und sind x und x' die Abscissen der Pole auf diesem Durchmesser, so ist nach dem vorigen Paragraphen $xx' = a'^2$. Umgekehrt, ist $MP \cdot MQ = a'^2$, so sind P und Q Pole.

3) Die Polare des äußeren Pols, P Fig. 38, Q Fig. 39, geht durch die Berührungspunkte der Tangenten, welche von ihm aus an die Ellipse sich legen lassen.

Nach §. 126, und weil das Gesetz auch für conjugirte Durchmesser gilt (§. 135).

§. 144.

Es seien, Fig. 38 oder 39, der Punkt P und die Linie NQ Pol und Polare. Durch den Pol sei eine Secante CD beliebig gelegt. Durch den einen der Punkte C oder D und durch die Mitte V des Stückes PQ lege man eine gerade Linie, CV oder DV, und durch den anderen der Punkte D oder C ziehe man eine Parallele zum Durchmesser AB: der Durchschnittspunkt beider Linien befindet sich auf der Polare.

Wir benutzen den Durchmesser AB gleich 2a und den conjugirten 2b als Coordinatenachsen. Die Gleichung der Ellipse ist dann

$$1)\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Die Abscisse des Punktes P sei x', und die Gleichung seiner Polare ist

$$2)\quad x = \frac{a^2}{x'}.$$

Die Gleichung der Secante CD erhält die Form

$$3)\quad y = cx - cx'.$$

Aus den Gleichungen 1) und 3) entwickele man x und y und man erhält in den sich ergebenden Werthen die Coordinaten der Punkte C und D. Es findet sich

$$x = \frac{ac^2x' \pm b\sqrt{a^2c^2 + b^2 - c^2x'^2}}{a^2c^2 + b^2}\, a$$

$$y = \frac{-bx' \pm a\sqrt{a^2c^2 + b^2 - c^2x'^2}}{a^2c^2 + b^2}\, bc.$$

Wir bezeichnen noch besonders diese Werthe mit ± genommen durch x'' und y'', mit ∓ genommen durch $x_{\prime\prime}$ und $y_{\prime\prime}$. Sind dann x'' und y'' die Coordinaten des Punktes C oder D, so sind $x_{\prime\prime}$ und $y_{\prime\prime}$ die des Punktes D oder C.

Die Coordinaten des Punktes V seien x^0 und y^0 und es ist

$$x^0 = \tfrac{1}{2}\left(x' + \frac{a^2}{x'}\right) = \frac{a^2 + x'^2}{2x'}$$

$$y^0 = 0.$$

Die Gleichung der Linie CV oder DV ist

$$4)\quad y = \frac{y''}{x'' - x^0}(x - x^0)$$

und die Gleichung der Linie, welche beziehlich durch D oder C geht, parallel mit AB, ist

$$5)\quad y = y_{\prime\prime}.$$

Die Abscisse des Punktes, in welchem die Linien 4) und 5) sich schneiden, wird erhalten, wenn man x aus ihren Gleichungen entwickelt. Es ergiebt sich

$$x = \frac{x''y_{\prime\prime} + (y'' - y_{\prime\prime})x^0}{y''}$$

oder wenn man die Werthe substituirt und etwas reducirt

$$x = \frac{a^2}{x'}.$$

Der Durchschnittspunkt der Linien 4) und 5) befindet sich daher nach 2) auf der Polare, und das ist die Behauptung.

§. 145.

1) Jede durch einen Punkt P, Fig. 38 oder 39, gelegte Secante CD wird durch die Ellipse, den Punkt P und dessen Polare harmonisch getheilt.

Man denke die Linie CV, und durch D eine Linie parallel dem Durchmesser AB. Nach dem vorigen Paragraph befindet sich der Durchschnittspunkt E dieser Linien auf der Polare. Nun sind ED, EQ, EV, EP harmonische Strahlen, also D, N, C, P harmonische Punkte.

2) Legt man durch einen Punkt P zwei beliebige Secanten CD und GH, und betrachtet dieselben als zwei Diagonalen eines vollständigen Vierecks, zu welchem ihre Durchschnittspunkte C, D, G, H mit der Ellipse vier der Eckpunkte sind, so ist die dritte Diagonale die Polare des Punktes P.

Folgt wie beim Kreis oder der Parabel.

3) Legt man durch einen Punkt P beliebig viele Secanten CD, GH. G'H'...., und denkt man durch die Durchschnittspunkte je zweier mit der Ellipse die Transversalen, so befinden sich die Punkte, in welchen solche Transversalen sich schneiden, in gerader Linie, nämlich auf der Polare des Punktes P.

§. 146.

Die Polaren von Punkten, welche in gerader Linie liegen, schneiden sich in einem Punkt, nämlich in dem Pol jener geraden Linie.

Es seien, Fig. 38 oder 39, P und NQ Pol und Polare, und es ist zu beweisen, daß die Polare jedes Punktes der geraden Linie NQ durch den Pol P gehe.

Wir legen die Hauptachsen zu Grunde. Die Gleichung der Ellipse sei

$$1)\quad a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Die Coordinaten des Punktes B seien x', y'; dann ist die Gleichung des Durchmessers

$$2)\quad y=\frac{y'}{x'}x.$$

Die Coordinaten des Punktes P seien x'', y'', die des Punktes Q seien x''', y'''.

Es ist $$MP.MQ=MB^2$$

und es verhält sich

$$MP:MB:MQ=x'':x':x'''$$

folglich ist

$$3)\quad x''x'''=x'^2$$

also $$x'''=\frac{x'^2}{x''}$$

und dann wegen 2)

$$y''' = \frac{x'y'}{x''}.$$

Die Gleichung der Polare NQ ist demnach, und weil sie parallel mit der Tangente in B geht,

$$y - \frac{x'y'}{x''} = -\frac{b^2x'}{a^2y'}\left(x - \frac{x'^2}{x''}\right)$$

oder

$$a^2x''\frac{y'}{x'}y - a^2y'^2 = -b^2x''x + b^2x'^2$$

oder, wenn man nach 1) $a^2y'^2 + b^2x'^2$ durch a^2b^2, und nach 2) $\frac{y'}{x'}$ durch $\frac{y''}{x''}$ ersetzt

$$3)\quad a^2y''y + b^2x''x = a^2b^2.$$

Die Abscisse irgend eines Punktes dieser Polare sei $x°$, die Ordinate $y°$ ist alsdann

$$\frac{a^2 - x''x°}{y''}\cdot\frac{b^2}{a^2}$$

und die Gleichung der Polare dieses Punktes, nach 3), indem man $x°$ und $y°$ statt x'' und y'' setzt,

$$4)\quad (a^2 - x''x°)\,y + x°y''x = a^2y''.$$

Die Coordinaten des Punktes, in welchem diese Polare den Durchmesser AB schneidet, werden erhalten, wenn man x und y aus den Gleichungen 2) und 4) entwickelt. Es ergiebt sich

$$x = x'' \text{ und } y = y''$$

demnach geht die Polare durch P und darin liegt der Satz.

Das Gesetz gilt auch umgekehrt.

§. 147. Aufgabe.

Es sind, Fig. 40, zwei Punkte F und G gegeben durch ihre Entfernung 2c von einander; man soll den geometrischen Ort des Punktes bestimmen, dessen Entfernungen von den gegebenen Punkten, zusammengenommen, die constante Summe 2a ausmachen.

Auflösung. Die Linie FG diene als erste Achse, die Mitte M des Stückes FG als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten. P sei ein Punkt, welcher der Bedingung entspricht, daß $PF + PG = 2a$. Seine Coordinaten seien

und y. Da M die Mitte von FG ist, so ist MG = MF = c. Man hat die Gleichungen

$$PF^2 = (c-x)^2 + y^2$$
$$PG^2 = (c+x)^2 + y^2.$$

Aus ihnen

$$PG^2 - PF^2 = 4cx$$

und hieraus, weil PG + PF = 2a ist,

$$PG - PF = \frac{2cx}{a}.$$

Dann weiter

$$1)\quad PG = a + \frac{cx}{a}$$

$$2)\quad PF = a - \frac{cx}{a}.$$

Hieraus entspringt, wenn man quadrirt und addirt,

$$PG^2 + PF^2 = 2\left(a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}\right)$$

und wenn man die ersten Gleichungen addirt, entsteht

$$PG^2 + PF^2 = 2(c^2 + x^2 + y^2).$$

Aus beiden folgt

$$y^2 = a^2 - c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - x^2$$

$$= a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2$$

oder

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Und dies ist die Gleichung, deren Herleitung verlangt wurde. Der geometrische Ort des Punktes P ist also eine Ellipse, deren große Achse 2a und deren kleine Achse $\sqrt{a^2 - c^2}$ ist.

§. 148.

Ist, Fig. 40, eine Ellipse gegeben, und nimmt man auf der großen Achse, vom Mittelpunkt aus, $MF = MG = \sqrt{a^2 - b^2}$, so ist die Summe der Entfernungen jedes Punktes der Ellipse von den Punkten F und G gleich der großen Achse 2a.

Denn aus $\sqrt{a^2 - b^2} = c$ folgt $b^2 = a^2 - c^2$, und während die Gleichung der Ellipse ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

ist sie nun auch

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Die beiden Punkte F und G werden die **Brennpunkte** der Ellipse genannt. Sie werden sehr einfach erhalten, indem man vom Scheitel C der kleinen Achse mit der Zirkelöffnung a die große Achse in F und G schneidet.

Die Linien von irgend einem Punkte P der Ellipse nach den Brennpunkten F, G derselben, heißen die **Brennstrahlen** oder **Leitstrahlen** jenes Punktes P.

Die Entfernung $MF = \sqrt{a^2 - c^2} = c$ heißt die **Eccentricität** der Ellipse.

§. 149.

Die Brennstrahlen irgend eines Punktes der Ellipse bilden mit der Tangente für denselben Punkt gleiche Winkel.

Es seien, Fig. 40, PF und PG die Brennstrahlen, PQ die Tangente für den Punkt P, und PK die Normale. Die Abscisse MK ist nach §. 130. gleich

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2}x$$

oder, da nach dem Vorstehenden $a^2 - b^2 = c^2$ ist,

$$MK = \frac{c^2}{a^2}x.$$

Daher ist

$$GK = c + \frac{c^2}{a^2}x$$

$$FK = c - \frac{c^2}{a^2}x$$

und es verhält sich

$$GK : FK = a^2 + cx : a^2 - cx.$$

Nach §. 147 1) und 2) verhält sich auch

$$PG : PF = a^2 + cx : a^2 - cx$$

also hat man

$$PG : PF = GK : FK.$$

Wegen dieser Proportion halbirt die Normale PK den Winkel, welchen die Brennstrahlen bilden, und dann sind, wie leicht erhellet, die Winkel gleich, welche von den Brennstrahlen mit der Tangente gebildet werden.

Wird der eine der Brennpunkte als ein leuchtender Punkt gedacht, so werden alle Lichtstrahlen, welche von ihm ausgehen und die Ellipse treffen, so zurückgeworfen, daß sie durch den anderen Brennpunkt gehen. Deshalb die Benennung der Brennpunkte.

§. 150.

Der Inhalt einer Ellipse, deren Hauptachsen 2a und 2b sind, ist πab.

Ueber der großen Achse CD, Fig. 41, werde ein Kreis geschlagen, und zu einer beliebigen Abscisse $CQ = x$ werde die Ordinate y der Ellipse und die Ordinate y' des Kreises gedacht. Dann ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

und $$y'^2 = 2ax - x^2.$$

Und es folgt

$$y^2 : y'^2 = b^2 : a^2$$

oder $$y : y' = b : a$$

Da dies Verhältniß für alle Ordinaten besteht, so muß sich auch (wenn man das Gesetz in §. 126 des zweiten Theils der Geometrie auf Flächen anwendet) die halbe Ellipse zum Halbkreise verhalten wie $b : a$, dann weiter die Ellipse zum Kreise wie $b : a$. Bezeichnet also q den Inhalt der Ellipse, so ist

$$q : \pi a^2 = b : a$$

und hieraus

$$q = \pi ab.$$

§. 151. Aufgabe.

Eine Ellipse zu zeichnen, wenn die große Achse 2a und die kleine Achse 2b gegeben sind.

I. Auflösung. Auf einer geraden Linie, Fig. 42, nehme man $MD = ME = a$, construire CC' in M normal auf DE, und $MC = MC' = b$, und es sind D, E, C, C' die Scheitelpunkte der Ellipse. Mit der Zirkelöffnung a schneide man von C oder C' aus die große Achse DE in F und G. Dies sind

die Brennpunkte nach §. 148. — Auf der großen Achse werde zwischen den Brennpunkten ein Punkt Q beliebig genommen, mit der Zirkelöffnung DQ von dem einen Brennpunkt G aus ein Bogen geschlagen, und dieser geschnitten in den Punkten P und P′ durch einen Bogen, den man mit der Zirkelöffnung EQ aus dem anderen Brennpunkt F beschreibt. Die Punkte P und P′ sind Punkte der Ellipse, weil die Summe ihrer Brennstrahlen der großen Achse 2a gleich ist. Vermittelst derselben Zirkelöffnungen ergeben sich noch zwei Punkte V und V′, indem man mit DQ aus F einen Bogen schlägt, und ihn in V und V′ von G aus mit EQ schneidet. Durch einen zweiten in der großen Achse genommenen Punkt S ergeben sich wieder vier Punkte der Ellipse u. s. w., bis man deren so viele erhalten hat, daß die Ellipse aus freier Hand durch sie gezeichnet werden kann.

II. Auflösung. Das Princip, welches die vorige Auflösung begründet, liefert auch ein mechanisches Verfahren, eine Ellipse stetig zu zeichnen. Nachdem nämlich die Brennpunkte F und G, Fig. 40, bestimmt sind, werde ein Faden in den Brennpunkten befestigt, dergestalt, daß der zwischen den Brennpunkten befindliche Theil des Fadens gleich der großen Achse 2a ist; wird nun der Faden vermittelst eines Stiftes P angespannt, so ist P ein Punkt der Ellipse, weil $PG + PF = 2a$ ist, und wird der Stift P, unter fortdauernder Anspannung des Fadens herumgeführt, so beschreibt er die Ellipse.

III. Auflösung. Ueber der großen Achse DE, Fig. 43, construire man ein rechtwinkliges Dreieck DEN, dessen eine Kathete DN gleich der kleinen Achse 2b ist. Ueber DN werde ein Halbkreis geschlagen. Auf DN nehme man einen Punkt Q beliebig, errichte in ihm die Normale QV auf DN, verlängere sie bis zum Durchschnitt S mit der großen Achse, errichte in S eine Normale auf der großen Achse, und nehme auf dieser Normale $SP = SP' = QV$, so sind P und P′ zwei Punkte der Ellipse, deren man in solcher Weise beliebig viele construiren kann.

Den Beweis zu führen, sei $DS = x$, $SP = y$, $DQ = z$. Es verhält sich

$$x : 2a = z : 2b.$$

Daraus ist

$$z = \frac{b}{a} x.$$

Ferner verhält sich

$$z : QV = QV : 2b - z$$

und hieraus entsteht, wenn man für z den Werth, und für QV, welches gleich SP ist, y setzt,

$$y^2 = \frac{b}{a}x\left(2b - \frac{b}{a}x\right)$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Also ist die Linie, welcher die Punkte P... angehören, die Ellipse, deren Achsen 2a und 2b sind.

§. 152.

Es sei MQ, Fig. 44, eine feste gerade Linie von unbestimmter Länge. Die Linie MC sei gleich $\frac{a-b}{2}$, und um den Punkt M drehbar. Die Linie CP sei gleich $\frac{a+b}{2}$, und hänge vermittelst des Punktes C mit der Linie MC dergestalt zusammen, daß sie um den Punkt C gedreht werden kann. Auf der Linie CP befinde sich der Punkt D in der Entfernung $\frac{a-b}{2}$ von C. Man stelle sich vor, der Punkt D der Linie CP werde längs der Linie MQ geführt, während der Zusammenhang der genannten Linien in den Punkten C und M nicht unterbrochen, und jene Bewegung durch die erforderlichen Drehungen um C und M vermittelt wird. Der Punkt P beschreibt alsdann eine Ellipse, deren Achsen 2a und 2b sind, deren große Achse in MQ liegt und deren Mittelpunkt M ist.

Man setze MQ gleich x, QP gleich y, den Winkel MCP gleich 2φ; dann ist der Winkel CPQ gleich φ. Das Stück DP ist $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ oder b. Und es ist

$$x = 2\frac{a-b}{2}\mathrm{Sin}\varphi + b\,\mathrm{Sin}\varphi$$

oder $x = a\mathrm{Sin}\varphi$

und $y = b\mathrm{Cos}\varphi.$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_2} = 1$$

woraus die Behauptung erhellet.

§. 153.

Es seien, Fig. 45, GH und VS zwei auf einander normal stehende feste gerade Linien. Auf der dritten Linie CP befinden sich drei feste Punkte C, D, P; die Entfernung CP sei a, die Entfernung PD sei b. Mit der Linie CP denke man die drehende Bewegung ausgeführt, welche unter der Bedingung möglich ist, daß der Punkt C der Linie CP beständig auf der Linie SV, und der Punkt D beständig auf GH bleibe. Während dieser Bewegung beschreibt der Punkt P eine Ellipse. Die Achsen der Ellipse sind 2a und 2b, sie liegen beziehlich in GH und SV, der Mittelpunkt der Ellipse also ist M.

Man setze MQ gleich x, QP gleich y, den Winkel MCP gleich φ; dann ist auch CPQ gleich φ. Und man hat

$$x = (a - b)\,\mathrm{Sin}\,\varphi + b\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

oder

$$x = a\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

und

$$y = b\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

woraus folgt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und wegen dieser Gleichung ist die Linie, welche der Punkt P beschreibt, eine Ellipse.

§. 154.

Jedes der beiden vorstehenden Gesetze kann benutzt werden, einen Ellipsenzirkel, Ellipsographen, zu construiren.

§. 155. Aufgabe.

Es ist eine Ellipse gegeben, in ihr ein Punkt P; man soll die Tangente der Ellipse für den Punkt P construiren.

Auflösung. Man construire, Fig. 35, über der Achse GH einen Halbkreis, verlängere die Ordinate des Punktes P bis zum Durchschnitt P′ mit dem Halbkreise, construire die Tangente P′Q für den Punkt P′ des Halbkreises, verlängere diese Tangente bis zum Durchschnitt Q mit der Achse GH, und ziehe PQ: dies ist die verlangte Tangente nach § 128.

Zweite Auflösung. Man ziehe, Fig. 46, durch den gegebenen Punkt P und durch den Mittelpunkt M eine gerade Linie PM, durch den einen Endpunkt C des beliebigen Durchmessers CD lege man CS parallel MP, ziehe SD, und PQ parallel SD, so ist PQ die verlangte Tangente. Wegen § 139 ist nämlich der zu PM conjugirte Durchmesser der Sehne SD parallel, also auch die Tangente in P.

Dritte Auflösung. Man ziehe von dem Punkte P aus die Brennstrahlen, und halbire den Winkel, welchen der eine Brennstrahl mit der Verlängerung des anderen bildet: die Halbirungslinie ist die verlangte Tangente.

§. 156. Aufgabe.

Es ist eine Ellipse gegeben, Fig. 47, außerhalb derselben ein Punkt P, uud man soll von P aus eine Tangente an die Ellipse legen.

Erste Auflösung. Es werde angenommen, PQ sei die verlangte Tangente. Man zeichne die Brennstrahlen QF und QG, verlängere FQ, mache die Verlängerung QV gleich QG und denke die Linien PG und PV. Die Linien PG und PV sind, wie leicht erhellet, einander gleich, und FV ist gleich der großen Achse. — Hiernach folgende Construction: Von P aus beschreibe man mit der Zirkelöffnung PG einen Kreis, schneide diesen von F aus mit einer Zirkelöffnung gleich der großen Achse in V und V′, ziehe FV und FV′, und es sind die Durchschnittspunkte Q und Q′ dieser Linien mit der Ellipse die Berührungspunkte zweier Tangenten, welche der Aufgabe entsprechen.

Zweite Auflösung. Man ziehe, Fig. 38, von P aus zwei beliebige Secanten CD und GH, dann die Transversalen CH und DG, welche sich in E schneiden mögen, und die Transversalen CG und DH, deren Durchschnittspunkt F sein mag; man zeichne ferner die Linie EF; sie ist die Polare des Punktes P und liefert in ihren Durchschnittspunkten mit der Ellipse die Berührungspunkte der verlangten Tangenten.

§. 157. Aufgabe.

Es ist eine Ellipse gegeben und eine gerade Linie, man soll eine Tangente für die Ellipse construiren, welche parallel der geraden Linie ist.

Auflösung. Man zeichne zwei Sehnen, welche der gegebenen gerade Linie parallel laufen, construire den Durchmesser der Sehnen, und durch seine Endpunkte Linien, parallel der gegebenen. Jede dieser Linien ist eine Tangente, welche der Aufgabe entspricht.

§. 158. Aufgabe.

Es ist eine Ellipse gegeben, in ihr ein Punkt P; man soll die Normale der Ellipse für den Punkt P construiren.

Auflösung. Man ziehe die Brennstrahlen des Punktes P und halbire den Winkel, welchen sie bilden. Die Halbirungslinie ist die Normale.

Oder man construire nach der ersten oder zweiten Auflösung des §. 155 eine Tangente für den Punkt P, und errichte auf der Tangente in dem Punkte P eine Normale.

§. 159. Aufgabe.

Es ist eine Ellipse gegeben und eine gerade Linie; man soll eine Normale für die Ellipse construiren, welche der gegebenen Linie parallel ist.

Auflösung. Man construire nach §. 157 eine Tangente, welche auf der gegebenen geraden Linie normal steht, und errichte auf der Tangente in dem Berührungspunkt eine Normale; sie ist die verlangte.

§. 160. Aufgabe.

Den Mittelpunkt einer gegebenen Ellipse zu construiren.

Auflösung. Man construire vermittelst irgend zweier parallelen Sehnen einen Durchmesser, und bestimme dessen Mitte. Sie ist der Mittelpunkt der Ellipse.

§. 161. Aufgabe.

Die Hauptachsen einer gegebenen Ellipse zu construiren.

Auflösung. Man bestimme den Mittelpunkt M der Ellipse, Fig. 36, beschreibe irgend einen Kreis, der M zum Mittelpunkt hat und die Ellipse schneidet, ziehe eine gemeinschaftliche Sehne KL, und fälle auf diese von M aus eine Normale MC. Sie ist eine der Achsen. Zur Bestimmung der zweiten bedarf es keiner Anleitung.

§. 162. Aufgabe.

Die Brennpunkte einer gegebenen Ellipse zu construiren.

Auflösung. Aus einem der Scheitelpunkte der kleinen Achse schlage man mit der halben großen Achse als Radius einen Bogen. Die Durchschnittspunkte desselben mit der großen Achse sind die Brennpunkte.

§. 163. Aufgabe.

Es sind zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse gegeben, und man soll die Hauptachsen construiren.

Auflösung. Es sei, Fig. 48, CD gleich $2b'$ der eine von den gegebenen conjugirten Durchmessern, QV gleich $2a'$ der andere. Durch den Punkt Q werde KL parallel CD gezogen. Dann ist KL Tangente der Ellipse für den Punkt Q. Wären L und K die Durchschnittspunkte der großen und kleinen Achse und dieser Tangente, so würde nach §. 140 $QL \cdot QK = b'^2$ sein. Ueber KL als Durchmesser denke man einen

Kreis beschrieben, und in Q eine Normale auf KL errichtet bis zum Durchschnitt E mit dem Kreise. Dann ist

$$QK.QL = QE^2$$

folglich

$$QE = b'.$$

Und der Kreis geht durch den Mittelpunkt M der Ellipse, weil KML ein rechtwinkliges Dreieck. Diese Bemerkungen reichen aus, zuvörderst die Hauptachsen der Lage nach zu construiren:

Man errichte nämlich QE normal auf KL, und mache QE gleich b', so sind E und M zwei Punkte des gedachten Kreises, dessen Mittelpunkt auf KL liegt, und der die Linie KL in den Punkten L und K schneidet, welche den Hauptachsen angehören. Wenn man also ME zieht, in der Mitte F von ME die Normale FG errichtet, von G aus mit GM oder GE die Linie KL in L und K schneidet, und LM und KM zieht, so sind die letzteren Linien diejenigen, in welchen die Hauptachsen liegen.

Es bleibt jetzt noch die Bestimmung der Hauptachsen selbst übrig. Man denke aus dem Punkte Q, welcher der Ellipse angehört, die Normale QS auf die erste Hauptachse ML gefällt. MS = x und SQ = y sind die Coordinaten des Punktes Q, während die Hauptachsen als Coordinatenachsen dienen. ML ist die Abscisse des Durchschnittpunktes L der Tangente für Q und der ersten Achse. Und es ist nach §. 126

$$ML.MS = a^2.$$

Die Hälfte a der gesuchten großen Achse ist also mittlere Proportionale zu ML und MS und kann leicht in bekannter Weise erhalten werden. Die Construction dieser mittleren Proportionale läßt sich aber an schon vorhandene Punkte knüpfen. Das Dreieck KEL ist nämlich rechtwinklig bei E, folglich KE mittlere Proportionale zu KQ und KL. Und wenn man KH gleich KE nimmt, und HO parallel KM zieht, so verhält sich

$$KQ : KH = KH : KL$$

also auch

$$MS : MO = MO : ML.$$

Deshalb ist MO die Hälfte der großen Achse. Und nimmt man weiter LJ gleich LE, und zieht JP parallel LM, so ist MP die Hälfte der kleinen Achse. Und die Aufgabe ist vollständig gelöst.

III. Von der Hyperbel.

§. 164.

Die Linie, deren Gleichung ist

$$y^2 = px + qx^2$$

heißt eine Hyperbel.

§. 165.

Zunächst werde die Gestalt der Curve ermittelt. Es ist

$$y = \pm\sqrt{px + qx^2}.$$

Für jeden Werth von x, der die Wurzel reell werden läßt, erhält y zwei in absoluter Hinsicht gleiche, aber entgegengesetzte Werthe. Die Curve liegt daher zum Theil oberhalb, zum Theil unterhalb der ersten Achse, und der oberhalb liegende Theil ist dem unteren congruent.

Setzt man Null statt x, so wird auch y zu Null. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist demnach ein Punkt der Curve. Setzt man weiter alle positiven Werthe für x, so wird die Wurzel beständig reell, und y wächst, bis es unendlich wird, wenn x unendlich groß geworden. Anfangs, während x klein ist, übt das Glied qx^2 keinen wesentlichen Einfluß aus, und die Curve hat Aehnlichkeit mit der Parabel; später, bei größeren Werthen von x, nehmen die Ordinaten rascher zu, und die Curve steigt lebhafter. Die Curve, so weit sie durch die positiven Werthe von x hervorgeht, hat also beiläufig die Gestalt von OPP′, Fig. 49, und erstreckt sich rechts ins Unendliche, ohne sich zu schließen.

Wir setzen ferner statt x alle negativen Werthe. Für den Werth $-\frac{p}{q}$ von x wird y zu Null. Ist also ON gleich $-\frac{p}{q}$, so ist N ein Punkt der Curve. Setzt man in absoluter Hinsicht

$$x < \frac{p}{q}$$

so folgt

$$qx < p$$

$$qx^2 < px$$

Daraus erhellet, daß für negative Werthe von x, welche in absoluter Hinsicht kleiner als $\frac{p}{q}$ sind, die Wurzel imaginair aus-

fällt. Zwischen O und N befindet sich deshalb kein Theil der Curve. Setzt man dagegen

$$x > \frac{p}{q}$$

so folgt

$$qx^2 > px$$

und hieraus ersieht sich, daß für negative Werthe von x, welche in absoluter Hinsicht größer sind als $\frac{p}{q}$, die Wurzel stets reell ist. Die Curve setzt sich also von N ab links fort. Um die Gestalt des links liegenden Theils der Curve zu erforschen, setzen wir $-\left(\frac{p}{q}+z\right)$ statt x. Dadurch entsteht

$$y = \pm\sqrt{pz+qz^2}$$

und da diese Gleichung mit der ursprünglichen vollkommen übereinstimmt, so erhellet, daß der links von N liegende Theil der Curve dem rechts von O liegenden congruent ist.

Die Hyperbel besteht demnach aus vier congruenten Theilen.

§. 166.

Das Stück ON, Fig. 49, nennen wir die **Hauptachse** der Hyperbel.

Es sei in absoluter Hinsicht

$$ON = \frac{p}{q} = 2a.$$

Die Gleichung der Hyperbel

$$y^2 = px + qx^2$$

läßt sich umformen in

$$y^2 = q\left(\frac{p}{q}x + x^2\right)$$

und wenn man für $\frac{p}{q}$ den Werth 2a setzt, entsteht

$$y^2 = q\,(2ax + x^2).$$

Die ursprüngliche Gleichung der Hyperbel ist von der entsprechenden der Ellipse nur in dem Vorzeichen des Gliedes qx^2 verschieden. Wir setzen in der eben erhaltenen Gleichung

$$q = \frac{b^2}{a^2}$$

wodurch b bestimmt ist, und erhalten für die Hyperbel die Gleichung

$$\text{I.} \quad y^2 = \frac{b}{a^2}(2ax + x^2)$$

welche der Gleichung I. der Ellipse entspricht.

Der in der Mitte von ON gelegene Punkt M heißt der Mittelpunkt der Hyperbel.

Es werde der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt verlegt. Dies geschieht, indem $-a+x$ statt x in I. gesetzt wird; und es entsteht

$$\text{II.} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

oder $$\text{III.} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

oder $$\text{IV.} \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Diese Gleichungen entsprechen wiederum denen der Ellipse. Die Gleichungen der Ellipse gehen in die der Hyperbel über, wenn man $b\sqrt{-1}$ statt b setzt. Eben so umgekehrt. Daher werden die Resultate, welche bei der Ellipse sich ergaben, ganz einfach auf die Hyperbel übertragen, indem in ihnen $b\sqrt{-1}$ statt b gedacht wird.

Wir werden uns bei der Hyperbel vornehmlich der Gleichung III. bedienen.

Eine Hyperbel heißt gleichseitig, wenn b gleich a ist.

§. 167.

Die Hyperbel geht in die Parabel über, wenn die Hauptachse unendlich groß wird.

Die Hauptachse drückt sich, in absoluter Hinsicht, aus durch $\frac{p}{q}$. Sie wird also ∞, wenn q Null ist. Dann aber geht die Gleichung der Hyperbel

$$y^2 = px + qx^2$$

über in $$y^2 = px$$

und das ist die der Parabel.

Die Parabel kann angesehen werden als die Curve, vermittelst deren die Ellipse und die Hyperbel in einander übergehen. Denn man lasse in

$$y^2 = px + qy^2$$

p abnehmen, so geht es durch Null hindurch in negative Werthe über, und man gelangt von der Hyperbel durch die Parabel hindurch zur Ellipse.

§. 168.

Wir denken eine Hyperbel

$$1)\ a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

und eine gerade Linie

$$2)\ y = px + q$$

und ermitteln die Bedingungen, unter welchen beide Linien keinen Punkt gemein haben, sich schneiden oder berühren.

Die Linien haben nach §. 39 keinen Punkt gemein, wenn es nicht reelle Werthe von x und y giebt, welche ihre Gleichungen erfüllen, und sie haben Punkte gemein, wenn solche Werthe bestehen. Die Resultate, welche sich ergeben, wenn man x und y aus den Gleichungen 1) und 2) entwickelt, werden auch erhalten, wenn man in den Resultaten 3) und 4) des Paragraphen 123 $b\sqrt{-1}$ statt b setzt. Es entsteht

$$3)\ x = \frac{-a^2pq \pm ab\sqrt{q^2 - (a^2p^2 - b^2)}}{a^2p^2 - b^2}$$

$$4)\ y = \frac{-b^2q \pm abp\sqrt{q^2 - (a^2p^2 - b^2)}}{a^2p^2 - b^2}$$

Die Nenner dieser Auflösungen gehen in Null über, wenn p gleich $\pm\frac{b}{a}$ ist. Für diesen Fall folgt aus den Gleichungen 1) und 2)

$$5)\ x = \mp\frac{(b^2 + q^2)a}{2bq}$$

$$6)\ y = \frac{q^2 - b}{2q}.$$

Die Hyperbel 1) und eine gerade Linie

$$7)\ y = \pm\frac{b}{q}x + q$$

haben hiernach einen Punkt gemeinschaftlich, und die Linien schneiden sich in diesem Punkt, welches eine Betrachtung, ähnlich der Paragraph 79 angestellten, lehrt.

Ist p nicht gleich $\pm\frac{b}{a}$, also $a^2p^2 - b^2$ nicht Null, so bleibt zu unterscheiden, ob

$$q^2 - a^2p^2 + b^2 < 0$$

$$q^2 - a^2p^2 + b^2 > 0$$

$$q^2 - a^2p^2 + b^2 = 0$$

sei. Im ersten Fall haben die Linien 1) und 2) keinen Punkt gemein, im zweiten haben sie zwei Punkte gemeinschaftlich, im dritten einen. Und durch Betrachtungen, ähnlich denen in Paragraph 79, folgt, daß die Linien im zweiten Fall sich in den beiden Punkten schneiden, im dritten sich in dem ihnen gemeinschaftlichen Punkte berühren.

Eine Hyperbel 1) und eine gerade Linie 2) haben also entweder keinen Punkt gemein, oder sie schneiden sich in einem Punkt, oder sie schneiden sich in zwei Punkten, oder sie berühren sich in einem Punkt, je nachdem die Bedingungen eintreten, welche eben festgestellt wurden.

§. 169.

Wenn q Null ist, also die gerade Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Mittelpunkt geht, sind sowohl die beiden Werthe von x in absoluter Hinsicht einander gleich, als die von y. Daraus erhellet, daß wenn eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie die Hyperbel schneidet, die Stücke der geraden Linie gleich sind, welche zwischen den Durchschnittspunkten und dem Mittelpunkt liegen. Jede durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, welche die Hyperbel schneidet, heißt ein reeller Durchmesser.

Damit aber eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie

$$y = px$$

die Hyperbel schneide, muß, wegen 3) und 4) im vorigen Paragraph

$$a^2p^2 < b^2$$

ein, d. h.

$$p < \frac{b}{a}$$

während im entgegengesetzten Fall, wenn

$$a^2p^2 > b^2$$

oder
$$p > \frac{b}{a}$$
ist, die gerade Linie und die Hyperbel keinen Punkt gemein haben. Dies läßt sich leicht auf die Figur übertragen. Es ist nämlich p die Tangente des Winkels, welchen die gerade Linie mit der ersten Achse bildet. Errichtet man also, Fig. 49, in O eine Normale, und denkt auf derselben OC gleich OC′ gleich b genommen, so werden alle geraden Linien, welche durch M und irgend einen zwischen C und C′ auf der Normale liegenden Punkt gehen, die Hyperbel schneiden, und Durchmesser sein; alle geraden Linien dagegen, welche durch M gehen und durch einen Punkt der Normale, der nicht zwischen C und C′ liegt, haben mit der Hyperbel keinen Punkt gemein. Jede durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehende gerade Linie, welche die Hyperbel nicht schneidet, noch durch einen der Punkte C und C′ geht, mag ein **imaginairer Durchmesser** heißen.

Einer besonderen Erwähnung verdient die Linie MC selbst. Bei dieser ist $p = \frac{b}{a}$, und die Werthe der oben bestimmten Coordinaten x und y, nämlich
$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2p^2}}$$
$$y = \frac{\pm abp}{\sqrt{b^2 - a^2p^2}}$$
sind unendlich. Die Linie hat also die in unendlicher Entfernung liegenden Punkte der Zweige OP und NQ mit der Hyperbel gemein. Sie kann als Tangente dieser äußersten Punkte gelten, und bildet den Uebergang zwischen den reellen und den imaginairen Durchmessern Eben so die Linie MC′.

Es sei D irgend ein Punkt der Hyperbel, G der Punkt der Linie MC, welcher mit jenem dieselbe Abscisse hat. Dann ist, weil $y = \frac{b}{a}x$, die Gleichung der Linie MC ist
$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$$
ferner
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$
also
$$y'^2 - y^2 = b^2$$

$$y' - y = \frac{b^2}{y' + y}$$

oder $$DG = \frac{b}{D'G}.$$

Man lasse die Abscisse zunehmen. Dabei nimmt D'G zu, also DG ab. Die Linie MC und die Curve nähern sich also mehr und mehr, ohne sich je zu erreichen.

§. 170.

Wenn eine gerade Linie und eine Curve sich mehr und mehr nähern, ohne sich je zu erreichen, oder, was dasselbe sagt, sich in der Unendlichkeit erreichen, wird die gerade Linie eine Asymptote der Curve genannt.

Die Linien MC und MC' sind also Asymptoten der Hyperbel.

Aus §. 168 erhellet, daß jede mit einer Asymptote parallele gerade Linie die Hyperbel in einem Punkte schneidet.

§. 171.

Die Linie CC', gleich 2b, heißt die Nebenachse der Hyperbel.

Die Linien ON und CC' zeigen sich eben so geeignet zur Bestimmung der Hyperbel, wie die Hauptachsen zur Bestimmung der Ellipse; und wie die Hauptachsen ein Bild der zugehörigen Ellipse gewähren, so gewinnt man durch die Hauptachse und Nebenachse vermittelst der Asymptoten leicht eine Vorstellung von der zugehörigen Hyperbel.

§. 172. Aufgabe.

Es ist eine Hyperbel gegeben durch die Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

in ihr ein Punkt durch seine Coordinaten x' und y', und man soll die Gleichung der Tangente für diesen Punkt der Hyperbel herleiten.

Auflösung. In den Gleichungen I und II des §. 125 setze man $b\sqrt{-1}$ statt b. Es entsteht

$$\text{I.}\quad y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$$

$$\text{II.}\quad a^2y'y - b^2x'x = -a^2b^2$$

und jede von diesen Gleichungen liefert die Tangente für den Punkt x', y' der Hyperbel.

§. 173.

Setzt man in der Gleichung II des vor. §. Null statt y, so ist x die Absciſſe des Durchschnittspunktes der Tangente mit der ersten Achse, und es ist diese Absciſſe

$$\text{I. } xx' = a^2, \text{ also } x = \frac{a^2}{x'}.$$

Und setzt man in der Gleichung I Null statt y, und entwickelt $x - x'$, so erhält man die Subtangente gleich

$$\text{II. } \frac{a^2 - x'^2}{x'}$$

Beide Resultate hätten sich auch ohne Weiteres aus §. 126 und 127 entnehmen lassen.

Setzt man in der Gleichung II des vorigen Paragraphen Null statt x, so ist y die Ordinate des Punktes, in welchem die Tangente die zweite Achse schneidet, und es ist

$$\text{III. } yy' = -b^2.$$

§. 174.

Die Gleichung der Normale für einen Punkt der Hyperbel ist

$$y - y' = -\frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x').$$

Sie ergiebt sich vermittelst §. 129 oder §. 172.

§. 175.

Die Absciſſe des Durchschnittspunktes der Normale mit der ersten Achse wird erhalten, wenn man in der Gleichung des vorigen Paragraphen Null statt y setzt und x entwickelt, oder indem man in §. 130 $b\sqrt{-1}$ statt b substituirt; und es entsteht für diese Absciſſe der Werth

$$1) \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2} x'$$

Die Subnormale geht hervor, wenn man in der Gleichung der Normale Null statt y setzt und $x - x'$ entwickelt, oder indem man in dem Ausdruck für die Subnormale der Ellipse $b\sqrt{-1}$ setzt statt b. Es entsteht für die Subnormale der Hyperbel

$$2) \quad \frac{b^2}{a^2} x'.$$

§. 176.

Die Mitten paralleler Sehnen einer Hyperbel befinden sich in einer geraden Linie, welche durch den Mittelpunkt geht. Und ist

$$1)\quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

die Gleichung einer Hyperbel, und

$$2)\quad y = px + q$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche die Hyperbel in zwei Punkten schneidet, so ist

$$3)\quad y = \frac{b^2}{a^2p}x$$

die Gleichung der durch den Mittelpunkt gehenden geraden Linie, welche die Sehne 2) und alle mit ihr parallelen Sehnen halbirt.

Dies erhellet leicht nach §. 132.

§. 177.

Die Linie

$$y = \frac{b^2}{a^2p}x$$

welche die Sehne

$$y = px + q$$

und alle mit ihr parallelen Sehnen der Hyperbel halbirt, theilt zugleich die Sehnen, so weit sie zwischen den Asymptoten liegen, in zwei gleiche Theile.

Die Gleichung der einen Asymptote ist

$$1)\quad y = \frac{b}{a}x$$

die der anderen

$$2)\quad y = -\frac{b}{a}x$$

Die gerade Linie

$$3)\quad y = px + q$$

und die Asymptote 1) schneiden sich in dem Punkt, dessen Coordinaten sind

$$x' = \frac{aq}{b - ap} \qquad y' = \frac{bq}{b - ap}$$

die Linie 3) und die Asymptote 2) in dem Punkt

$$x'' = -\frac{aq}{b + ap} \qquad y'' = \frac{bq}{b + ap}$$

Die Coordinaten der Mitte des zwischen den Asymptoten liegenden Stückes der Linie 3) sind

$$x''' = \frac{a^2pq}{b^2 - a^2p^2} \qquad y''' = \frac{b^2q}{b^2 - a^2p^2}.$$

Es verhält sich also

$$\frac{y'''}{x'''} = \frac{b^2}{a^2p}.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von q, also für alle mit der Linie $y = px + q$ parallelen Linien derselbe, und deshalb ist

$$y = \frac{b^2}{a^2p}x$$

die Linie, welche die Stücke halbirt, die die Asymptoten von der Linie $y = px + q$ und von damit parallelen Linien abschneiden. Daraus erhellet der Satz.

§. 178.

Die beiden Stücke einer beliebigen Sehne, welche zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegen, sind einander gleich.

Denn es ist, Fig. 49, V die Mitte von FF', zugleich die Mitte von EE', also FE gleich F'E'. Eben so, wenn man die Sehne PQ denkt.

§. 179.

I. Ist

$$1)\quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

die Gleichung einer Hyperbel, und

$$2)\quad y = px + q$$

die Gleichung einer geraden Linie, so ist nach §. 176

$$3)\quad y = \frac{b^2}{a^2p}x$$

die Gleichung der durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehenden geraden Linie, welche alle Sehnen halbirt, die mit der Linie 2) parallel laufen.

II. Ist

$$4)\quad y = cx$$

irgend ein Durchmesser, so ist

$$5)\quad y = \frac{b^2}{a^2c}x + q$$

die Gleichung, welche alle Sehnen liefert, die durch den Durchmesser 4) halbirt werden. Denn ist

$$y = px + q$$

eine Sehne, welche durch 4) halbirt wird, so muß wegen I

$$c = \frac{b^2}{a^2p}$$

sein; und hieraus folgt

$$p = \frac{b^2}{a^2c}.$$

III. Es sei $y = cx$ ein reeller Durchmesser, α der Winkel, welchen er mit der ersten Achse bildet, und x' und y' seien die Coordinaten eines seiner Scheitelpunkte. Dann ist $\frac{y'}{x'} = \operatorname{tg}\alpha = c$. Die Gleichung der Sehnen, welche durch diesen Durchmesser halbirt werden, ist

$$y = \frac{b^2}{a^2c}x + q$$

oder

$$y = \frac{b^2x'}{a^2y'}x + q.$$

Und es erhellet aus §. 172, daß die Tangenten für die Scheitelpunkte unseres Durchmessers parallel sind mit den Sehnen, welche er halbirt.

Weiter folgt aus §. 177, daß der Durchmesser auch die Tangenten seiner Scheitelpunkte, so weit sie zwischen den Asymptoten liegen, halbirt.

IV. Für den Werth Null von q liefert die Gleichung 5) den Durchmesser

$$y = \frac{b^2}{a^2c}x.$$

Die Sehnen, welche dieser Durchmesser halbirt, werden gegeben durch die Gleichung

$$y = \frac{b^2}{a^2 \cdot \frac{b^2}{a^2c}}x + q$$

oder $$y = cx + q.$$
Diese Sehnen sind parallel mit dem Durchmesser 4).

Wenn daher PQ irgend ein Durchmesser ist, und P'Q' der Durchmesser, welcher parallel ist mit den Sehnen, die jener Durchmesser halbirt, so sind die Sehnen, welche der letzte Durchmesser P'Q' halbirt, parallel mit dem ersten Durchmesser PQ.

Zwei Durchmesser, von welchen jeder die Sehnen halbirt, welche parallel mit dem anderen laufen, heißen conjugirte Durchmesser.

V. Sind
$$y = px$$
und
$$y = p'x$$
zwei conjugirte Durchmesser, so ist immer
$$pp' = \frac{b^2}{a^2}.$$
Denn es ist
$$p' = \frac{b^2}{a^2p}.$$

VI. Von zwei conjugirten Durchmessern ist jedesmal der eine reell, der andere imaginair. Denn es ist
$$pp' = \frac{b^2}{a^2}$$
und ist
$$p < \frac{b}{a}$$
so folgt
$$p' > \frac{b}{a}$$
und es erhellet der Satz aus §. 169.

§. 180. Aufgabe.

Es sind, Fig. 50, eine Hyperbel gegeben durch die Gleichung
$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$
und zwei conjugirte Durchmesser MG und MH durch die Winkel α und α', welche sie mit der ersten Achse bilden. Man soll die Gleichung der Hyperbel finden, während diese Durchmesser als Coordinatenachsen dienen.

Auflösung. Es sei Q irgend ein Punkt in der Hyperbel, seine Coordinaten für die ursprünglichen Coordinatenachsen seien x und y, seine Coordinaten für die neuen Ach-

sen x' und y'. Es kommt darauf an, eine Gleichung zwischen x' und y' herzuleiten. Man hat

1) $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$

2) $x = x'\mathrm{Cos}\,\alpha + y'\mathrm{Cos}\,\alpha'$

3) $y = x'\mathrm{Sin}\,\alpha + y'\mathrm{Sin}\,\alpha'$.

Die Werthe aus 2) und 3) setze man in 1). Es entsteht

4) $(a^2\mathrm{Sin}\alpha'^2 - b^2\mathrm{Cos}\alpha'^2)y'^2 + 2(a^2\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\alpha' - b^2\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\alpha')x'y'$
$+ (a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2)x'^2 = -a^2b^2$.

Weil die Linien MG und MH conjugirte Durchmesser sein sollen, so ist zu berücksichtigen, daß

$$pp' = \frac{b^2}{a^2}$$

oder $$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$$

oder $$a^2\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}\alpha' - b^2\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}\alpha' = 0 \text{ ist.}$$

Die verlangte Gleichung ist demnach

5) $(a^2\mathrm{Sin}\,\alpha'^2 - b^2\mathrm{Cos}\,\alpha'^2)\,y'^2 + (a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2)x'^2$
$= -a^2b^2$.

Auch dieser Gleichung läßt sich eine bequemere Gestalt geben. Es werde in dem Scheitel G des reellen Durchmessers MG die Tangente LL′ gedacht. Das Stück LL′ der Tangente, welches von den Asymptoten abgeschnitten wird, steht zu dem Durchmesser MG in derselben Beziehung, in der die Nebenachse CC′ zur Hauptachse MO steht. Wir setzen MG gleich a', GL gleich b', und werden diese Stücke in der Gleichung 5) einführen.

In der Gleichung 5) wird für den Werth a' von x die Ordinate y' zu Null. Daher folgt

6) $$a'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2 - a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2}.$$

Den Werth von GL = b' zu finden, müssen wir einen besonderen Weg einschlagen. Wir ermitteln zuerst die Gleichung der Asymptote MC für die conjugirten Durchmesser als Coordinatenachsen. Die Gleichung der Asymptote MC für die Hauptachsen ist

$$y = \frac{b}{a}x$$

oder 7) $$ay = bx.$$

V sei irgend ein Punkt der Asymptote, seine Coordinaten für die conjugirten Durchmesser seien x″, y″. Dann ist, wie leicht erhellet,

$$8) \qquad x = x''\mathrm{Cos}\,\alpha + y''\mathrm{Cos}\,\alpha'$$

$$9) \qquad y = x''\mathrm{Sin}\,\alpha + y''\mathrm{Sin}\,\alpha'.$$

Diese Werthe setzen wir in 7), und es entsteht

$$(a\mathrm{Sin}\,\alpha' - b\mathrm{Cos}\,\alpha')\,y'' = (b\mathrm{Cos}\,\alpha - a\mathrm{Sin}\,\alpha)\,x''$$

oder 10) $$y'' = \frac{b\mathrm{Cos}\,\alpha - a\mathrm{Sin}\,\alpha}{a\mathrm{Sin}\,\alpha' - b\mathrm{Cos}\,\alpha'}\,x''.$$

Damit diese Gleichung die der Asymptote für die conjugirten Durchmesser als Coordinatenachse werde, ist noch die Bedingung einzuführen, daß

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Hieraus folgt aber

$$a^2\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha' = b^2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha'$$

$$11) \quad a\mathrm{Sin}\,\alpha' : b\mathrm{Cos}\,\alpha' = b\mathrm{Cos}\,\alpha : a\mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$12) \quad a\mathrm{Sin}\,\alpha' - b\mathrm{Cos}\,\alpha' : b\mathrm{Cos}\,\alpha' = b\mathrm{Cos}\,\alpha - a\mathrm{Sin}\,\alpha : a\mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$\frac{b\mathrm{Cos}\,\alpha - a\mathrm{Sin}\,\alpha}{a\mathrm{Sin}\,\alpha' - b\mathrm{Cos}\,\alpha'} = \frac{a\mathrm{Sin}\,\alpha}{b\mathrm{Cos}\,\alpha'}$$

und wenn man diesen Werth in 10) setzt, ergiebt sich

$$13) \qquad y'' = \frac{a\mathrm{Sin}\,\alpha}{b\mathrm{Cos}\,\alpha'}\,x''$$

als Gleichung der Asymptote für die conjugirten Durchmesser.

Wird in 13) a′ statt x″ gesetzt, so wird y″ zu GL, d. h. b′ Daher haben wir nach 6)

$$14) \quad b'^2 = \frac{a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{b^2\mathrm{Cos}\,\alpha'^2}\cdot\frac{a^2b^2}{b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2 - a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2}.$$

Um hier zu reduciren, bilden wir aus 11)

$$a^2\mathrm{Sin}\,\alpha'^2 : b^2\mathrm{Cos}\,\alpha'^2 = b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2 : a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2$$

$$a^2\mathrm{Sin}\alpha'^2 - b^2\mathrm{Cos}\alpha'^2 : b^2\mathrm{Cos}\alpha'^2 = b^2\mathrm{Cos}\alpha^2 - a^2\mathrm{Sin}\alpha^2 : a^2\mathrm{Sin}\alpha^2$$

woraus folgt

$$15) \quad \frac{a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2 - a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2} = \frac{b^2\mathrm{Cos}\,\alpha'^2}{a^2\mathrm{Sin}\alpha'^2 - b'\mathrm{Cos}\alpha'^2}$$

Diesen Werth setzen wir in 14) und erhalten endlich

$$16)\quad b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\mathrm{Sin}\,\alpha'^2 - b^2\mathrm{Cos}\,\alpha'^2}.$$

Aus 6) und 16) ergiebt sich

$$17)\quad a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2 = -\frac{a^2b^2}{a'^2}$$

$$18)\quad a^2\mathrm{Sin}\,\alpha'^2 - b^2\mathrm{Cos}\,\alpha'^2 = \frac{a^2b^2}{b'^2}.$$

Wir setzen die letzten Werthe in 5) und erhalten

$$\frac{a^2b^2}{b'^2}y'^2 - \frac{a^2b^2}{a'^2}x'^2 = -a^2b^2$$

oder, wenn wir heben, die Nenner beseitigen und die Marken bei den Veränderlichen unterdrücken:

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2.$$

Die Gestalt der Gleichung der Hyperbel ist also dieselbe, gleichviel ob die Haupt- und Nebenachse, oder ein reeller Durchmesser und die dazu gehörige Nebenachse als Parameter dienen.

Und deshalb werden die Resultate, welche vermittelst der Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

hergeleitet werden können, sich wiederholen, wenn man sich der eben erhaltenen Gleichung bedienen wollte, und nur in einzelnen Fällen ihre Bedeutung ändern. Zugleich erhellet, daß die erhaltene Gleichung aus der ähnlichen der Ellipse hervorgeht, wenn in der letzten $b'\sqrt{-1}$ gesetzt wird statt b'.

§. 181.

Es ist jedesmal

$$\text{I.}\quad a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$$

$$\text{II.}\quad a'b'\mathrm{Sin}\,\beta = ab$$

wenn unter β der Winkel verstanden wird, welchen die conjugirten Achsen mit einander bilden.

Beide Gesetze gehen aus §. 136. hervor, wenn man statt b und b' beziehlich $b\sqrt{-1}$ und $b'\sqrt{-1}$ substituirt. Sie können auch geradezu abgeleitet werden, wie folgt:

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$1)\quad a'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\mathrm{Cos}\,\alpha^2 - a^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2}$$

$$2) \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{Sin}\alpha'^2 - b^2 \operatorname{Cos}\alpha'^2}.$$

Aus der Bedingungsgleichung

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$$

folgt

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2 \operatorname{Cos}\alpha}{a^2 \operatorname{Sin}\alpha}$$

und hieraus ergiebt sich

$$3) \quad \operatorname{Sin}\alpha'^2 = \frac{b^4 \operatorname{Cos}\alpha^2}{a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2 + b^4 \operatorname{Cos}\alpha^2}$$

$$4) \quad \operatorname{Cos}\alpha'^2 = \frac{a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2}{a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2 + b^4 \operatorname{Cos}\alpha^2}.$$

Diese Werthe setzt man in 2). Es entsteht

$$5) \quad b'^2 = \frac{a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2 + b^4 \operatorname{Cos}\alpha^2}{b^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 - a^2 \operatorname{Sin}\alpha^2}.$$

Die Differenz zwischen 1) und 5) ist

$$a'^2 - b'^2 = \frac{a^2 b^2 - a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2 - b^4 \operatorname{Cos}\alpha^2}{b^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 - a^2 \operatorname{Sin}\alpha^2}$$

und wenn man rechts wirklich dividirt, ergiebt sich

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$$

Wir wenden uns zum zweiten Gesetz. Es ist, wie die Fig. 50 lehrt, $\alpha' = \alpha + \beta$, also, wegen der Bedingungsgleichung

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{b^2}{a^2}.$$

Aus dieser Gleichung findet sich

$$6) \quad \operatorname{Sin}\beta^2 = \frac{(b^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 - a^2 \operatorname{Sin}\alpha^2)^2}{a^4 \operatorname{Sin}\alpha^2 + b^4 \operatorname{Cos}\alpha^2}.$$

Und das Produkt aus 1), 5), und 6) liefert

$$a' b' \operatorname{Sin}\beta = ab.$$

§. 182.

Man stelle sich eine Hyperbel vor, irgend einen reellen Durchmesser derselben, und denke von einem beliebigen Punkt der Hyperbel zwei gerade Linien nach den Scheitelpunkten jenes Durchmessers gezogen: zwei solche Linien heißen Sup-

plementar-Sehnen der Hyperbel, Hauptsupplementarsehnen, wenn der Durchmesser die Hauptachse ist.

§. 183.

Zwei Durchmesser, welche mit Supplementarsehnen parallel laufen, sind conjugirte Durchmesser.

Der Beweis wird geführt, wie der des Satzes in §. 139.

§. 184.

Man denke eine Hyperbel und aus einem beliebigen Punkt Q zwei Secanten, welche die Hyberbel in Punkten C, D und C', D' schneiden mögen. Die mit den Secanten parallelen Durchmesser seien 2d und 2d'. Es verhält sich in absoluter Hinsicht

$$QC.QD : QC'.QD' = d^2 : d'^2$$

durch eine Rechnung ähnlich der in §. 94. findet man

$$QC.QD = (a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2)\frac{1}{a^2\operatorname{Sin}\alpha^2 - b^2\operatorname{Cos}\alpha^2}$$

und nach §. 180. ist

$$a^2\operatorname{Sin}\alpha^2 - b^2\operatorname{Cos}\alpha^2 = -\frac{a^2b^2}{d^2}.$$

Daraus ergiebt sich das Gesetz.

§. 185.

Der Mittelpunkt einer Hyperbel sei M. Ein beliebiger Punkt sei P. Man ziehe den Durchmesser MP und ist dieser Durchmesser reell und gleich 2a, so nehme man auf ihm einen Punkt Q dergestalt, daß $MP.MQ = a^2$, ist aber der Durchmesser imaginair und gleich 2b, so nehme man Q dergestalt, daß $MP.MQ = -b^2$, und die Punkte P und Q werden Pole der Hyperbel genannt, jeder auch der Pol des anderen.

Die Pole befinden sich auf einer Seite vom Mittelpunkt, wenn der Durchmesser reell, zu entgegengesetzten, wenn er imaginair ist.

Wird durch den einen der Pole eine gerade Linie gedacht, parallel mit dem Durchmesser, welcher der conjugirte ist zu dem, der die Pole enthält, so heißt jene Linie die Polare des anderen Pols, dieser dann der Pol der Polare.

Nach diesen Bestimmungen und mit Rücksicht auf §. 173. ergeben sich leicht und in gleicher Weise für die Hyperbel die Gesetze, welche wir die Polare betreffend für die Ellipse mitgetheilt haben.

§. 186. Aufgabe.

Es sind, Fig. 51, zwei feste Punkte F und G gegeben durch ihre Entfernung 2c von einander; man soll den geometrischen Ort des Punktes bestimmen, dessen Entfernungen von den gegebenen Punkten die constante Differenz 2a liefern.

Auflösung. Die Linie FG diene als erste Achse, die Mitte M des Stückes FG als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten. P sei ein Punkt, welcher der Bedingung entspricht, daß PG — PF = 2a. Die Coordinaten des Punktes P seien x und y. Es ist MF = MG = c, weil M die Mitte von FG, d. h. 2c, ist. Es bieten sich die Gleichungen dar

$$PG^2 = (c+x)^2+y^2$$

$$PF^2 = (x-c)^2+y^2.$$

Die Subtraction liefert

$$PG^2-PF^2 = 4cx.$$

Es ist

$$PG-PF = 2a$$

weiter, durch Division,

$$PG+PF = \frac{2cx}{a}$$

und nun folgt

$$1)\quad PG = \frac{cx}{a}+a$$

$$2)\quad PF = \frac{cx}{a}-a.$$

Beide Gleichungen quadrire man und addire darauf; das liefert

$$PG^2+PF^2 = 2\left(a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}\right).$$

Die Summe der ersten beiden Gleichungen ist

$$PG^2+PF^2 = 2(c^2+x^2+y^2).$$

Und es folgt

$$y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2}-x^2-c^2+a^2$$

$$= \frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-(c^2-a^2)$$

$$y^2 = \frac{c^2-a^2}{a^2}(x^2-a^2).$$

Dies ist die Gleichung des verlangten geometrischen Ortes. Derselbe ist eine Hyperbel, deren Hauptachse 2a und deren Nebenachse $\sqrt{c^2 - a^2}$ ist.

§. 187.

Und ist, Fig. 51, eine Hyperbel gegeben, und nimmt man auf der Hauptachse vom Mittelpunkt aus MF = MG $= \sqrt{a^2 + b^2}$, so ist die Differenz der Entfernungen jedes Punktes der Hyperbel von den Punkten F und G gleich der Hauptachse 2a.

Denn aus $\sqrt{a^2 + b^2} = c$ folgt $b^2 = c^2 - a^2$, und während die Gleichung der Hyperbel ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

ist sie auch

$$y^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

§. 188.

Die beiden Punkte F und G heißen die **Brennpunkte** der Hyperbel. Die geraden Linien von irgend einem Punkt P der Hyperbel nach den Brennpunkten derselben heißen die **Brennstrahlen** oder Leitstrahlen jenes Punktes P. Die Entfernung MF = MG $= \sqrt{a^2 + b^2} = c$ wird die **Eccentricität** der Hyperbel genannt.

Die Brennpunkte bestimmen sich, indem man vom Mittelpunkt M aus mit MD $= \sqrt{a^2 + b^2}$ die Hauptachse in F und G schneidet.

§. 189.

Die Brennstrahlen irgend eines Punktes der Hyperbel bilden gleiche Winkel mit der Tangente für denselben Punkt.

Es seien, Fig. 51, PF und PG die Brennstrahlen, PN die Tangente für den Punkt P. Die Abscisse des Durchschnittspunktes N der Tangente mit der Hauptachse ist nach §. 173 $\frac{a^2}{x}$. Daher hat man

$$GN = c + \frac{a^2}{x}$$

$$NF = c - \frac{a^2}{x}$$

folglich verhält sich

$$GN : NF = cx + a^2 : cx - a^2.$$

Nach §. 186 1) und 2) verhält sich auch

$$PG : PF = cx + a^2 : cx - a^2$$

also hat man

$$PG : PF = GN : NF$$

und wegen dieser Proportion halbirt die Tangente PN den Winkel, welchen die Brennstrahlen PG und PF bilden. Das ist der Satz.

Man verlängere den Brennstrahl GP über P hinaus. Die Verlängerung dieses Brennstrahles und der andere Brennstrahl bilden ebenfalls gleiche Winkel mit der Tangente. Wird daher ein Brennpunkt als leuchtend angenommen, so werden alle Lichtstrahlen, welche von ihm ausgehen und den zu ihm gehörigen Theil der Hyperbel treffen, zurückgeworfen, als wenn sie aus dem anderen Brennpunkte kämen.

§. 190. Aufgabe.

Es ist, Fig. 52, eine Hyperbel gegeben durch ihre Haupt- und Nebenachse 2a und 2b; man soll die Gleichung der Hyperbel herleiten, während die Asymptoten als Coordinatenachsen dienen.

Auflösung. Der Punkt H sei in der Hyperbel beliebig angenommen, seine Coordinaten für die Asymptoten als Coordinatenachsen seien x und y. Man ziehe durch H die Linie LV normal zur Hauptachse. Die Dreiecke LDH und CMC′ sind alsdann ähnlich, und deshalb ist LD = DH = y. Aus der Figur erhellet nun leicht

$$1)\quad (x+y)\operatorname{Sin}\alpha = LV$$

$$2)\quad (x-y)\operatorname{Sin}\alpha = HV.$$

Man quadrire beide Gleichungen und subtrahire; das liefert

$$3)\quad 4xy\operatorname{Sin}\alpha^2 = LV^2 - HV^2.$$

Es ist aber

$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{b}{MC} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{c}$$

und $LV^2 - HV^2$ ist nach §. 169 gleich b^2. Dadurch geht 3) über

$$4xy\frac{b^2}{c^2} = b^2$$

oder
$$xy = \frac{c^2}{4}.$$

Dies ist die verlangte Gleichung. Den Ausdruck $\frac{c^2}{4}$ pflegt man die Potenz der Hyperbel zu nennen. Man ziehe OE parallel C′M. Dann ist O die Mitte von CC′, E die Mitte von MC, und OE gleich $\frac{1}{2}MC' = \frac{1}{2}c$, folglich $OE^2 = \frac{c^2}{4}$. Der erhaltenen Gleichung läßt sich deshalb auch die Form $xy = OE^2$ geben.

§. 191. Aufgabe.

Eine Hyperbel zu zeichnen, wenn deren Hauptachse 2a und Nebenachse 2b gegeben sind.

Auflösung. Auf einer geraden Linie, Fig. 53, nehme man $MD = MO = a$, errichte in O die Normale OC, mache diese gleich b, und nehme $MF = MG = MC$. Dann sind M der Mittelpunkt, O und D die Scheitelpunkte, und F und G die Brennpunkte der Hyperbel. Auf der Hauptachse werde der Punkt Q außerhalb der Brennpunkte beliebig angenommen. Mit der Zirkelöffnung QO schlage man von F aus einen Bogen, und schneide ihn mit der Zirkelöffnung DQ von G aus in P und P′. P und P′ sind zwei Punkte der Hyperbel; denn die Differenz der Brennstrahlen PG und PF, oder P′G und P′F, ist gleich $DQ - OQ = 2a$. Vermittelst derselben Zirkelöffnungen können, wie leicht erhellet, noch zwei Punkte V und V′ erhalten werden. In solcher Weise verschafft man sich weiter so viele Punkte, als man nöthig erachtet, um die Hyperbel durch dieselben zu zeichnen.

Auf dasselbe Princip läßt sich ein mechanisches Verfahren gründen, die Hyperbel stetig zu zeichnen: Ein Lineal GS sei um den einen Brennpunkt G drehbar. Ein Faden sei einerseits in dem anderen Brennpunkt F, andererseits an dem Lineal in R befestigt, dergestalt, daß der zwischen F und R befindliche Theil des Fadens durch die Hauptachse 2a zu der Länge RG ergänzt werde. Ein Stift S, welcher den Faden spannt und zugleich an dem Lineal erhält, beschreibt, während der Drehung des Lineals um G, die Hyperbel.

§. 192. Aufgabe.

In einer Hyperbel ist ein Punkt gegeben; man soll die Tangente der Hyperbel für diesen Punkt construiren.

Auflösung. Man ziehe die Brennstrahlen dieses Punktes und halbire den Winkel, welchen sie bilden. Die Halbirungslinie ist die verlangte Tangente.

Oder man ziehe von dem gegebenen Punkt P nach dem Mittelpunkt M, zeichne irgend einen reellen Durchmesser HL, aus dem einen Scheitelpunkt H eine Sehne HV parallel mit PM, zeichne ferner die Supplementarsehne LV, und durch P eine Linie parallel mit LV. Sie ist die Tangente.

§. 193. Aufgabe.

Es ist, Fig. 54, eine Hyperbel gegeben, außerhalb derselben ein Punkt P; und man soll von dem Punkte P aus eine Tangente an die Hyperbel legen.

Auflösung. Man nehme an, PQ sei die verlangte Tangente, denke die Brennstrahlen QG und QF, GS gleich der Hauptachse, oder, was dasselbe sein würde, QS gleich QF, und die Linien PF und PS. Die letzteren Linien fallen, wie leicht erhellet, einander gleich aus. Es ergiebt sich hieraus folgende Construction: Man beschreibe von P aus mit PF einen Kreisbogen, schneide diesen von G aus mit der Hauptachse als Radius in S und S', ziehe die Linien GS und GS' bis zu ihren Durchschnitten Q und Q' mit der Hyperbel, endlich die Linien PQ und PQ'. Jede der letzteren ist eine Tangente, wie sie gefordert war.

Auch kann verfahren werden, wie in der zweiten Auflösung des §. 156.

§. 194.

Die Construction der Normale für einen in der Hyperbel gegebenen Punkt, von Tangenten parallel zu gegebenen Linien u. dgl. m. wird man leicht finden.

IV. Von den Linien des zweiten Grades im Allgemeinen.

§. 195.

In den vorangegangenen Untersuchungen über die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel sind wir von den Gleichungen

$$1)\quad y^2 = px$$
$$2)\quad y^2 = px - qx^2$$
$$3)\quad y^2 = px + qx^2$$

ausgegangen. Die Gleichungen 2) und 3) nahmen einfachere Gestalten an, als wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Curve verlegten. In den Paragraphen 90, 134, 180 dagegen stießen wir auf zusammengesetztere Gleichungen für diese Curven, bevor wir nämlich die Bedingung einführten, vermittelst der ein Glied in jeder der Gleichungen verschwindet. Wir haben also Gleichungen von verschiedener Gestaltung für dieselben Curven kennen gelernt.

Die Gleichung ist uns von Hause aus als das Haupterkennungsmittel der Linie erschienen, zugleich als eine Formel, welche alle Eigenschaften der Linie in sich schließt. Die verschiedenen Gleichungen einer Curve müssen daher, ihrem Wesen nach, übereinstimmen; und sie sind, wie die Folge zeigen wird, besondere Fälle einer Gleichung, von allgemeinerer Gestalt.

Die größere oder geringere Einfachheit der Gleichungen hängt ab von der mehr oder minder symmetrischen Lage der Coordinatenachsen gegen die Curve. Zu den allgemeinsten Gleichungen für die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel werden wir daher gelangen, indem wir von den, den oberen Gleichungen zu Grunde liegenden Coordinatenachsen, auf ganz willkürliche Coordinatenachsen übergehen. Dieser Uebergang ist nach §. 62. leicht auszuführen. Es handelt sich hier nicht um die Gleichungen selbst, nur um deren Gestalt. Daher genügt es, zu bemerken, daß nach jenem Paragraphen die Verlegung der Coordinatenachsen bewirkt wird, indem man in den oberen Gleichungen statt x und y Ausdrücke von der Form $tx + ry + s$ substituirt. Jede der Gleichungen 1), 2), 3) kommt dadurch auf die Form

$$4)\quad ay^2 + bxy^2 + cx + dy + ex + f = 0.$$

Die Parabel, Ellipse und Hyperbel haben also eine gemeinschaftliche Grundgleichung. Sie enthält alle die besonderen Gleichungen, welche wir für diese Curven kennen gelernt haben, als besondere Fälle. Diese gehen hervor, indem die Coefficienten bestimmte Werthe annehmen, durch welche überhaupt bedingt wird, ob der Gleichung eine Parabel, oder eine Ellipse, oder eine Hyperbel entspricht.

Es wäre möglich, daß noch andere Linien auf dieselbe allgemeine Gleichung 4) führen, und dann würde diese Gleichung nicht bloß die genannten Curven, sondern auch andere

Linien liefern. Dies zu entscheiden und zugleich die Bedingungen festzustellen, welche die Coefficienten der Gleichung erfüllen müssen, damit ihr diese oder jene Linie entspreche, ist der Zweck der folgenden Untersuchungen.

§. 196.

Aus der Gleichung

$$1)\quad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

ergiebt sich

$$2)\ y = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2 + 2(bd-2ae)x + (d^2-4af)}}{2a}.$$

Wir setzen voraus, ä sei nicht Null.

Es sei

$$b^2 - 4ac = p$$
$$bd - 2ae = q$$
$$d^2 - 4af = r.$$

Der Radicand drückt sich dann aus durch

$$3)\quad px^2 + 2qx + r.$$

Dieser Ausdruck läßt sich umgestalten und wiedergeben durch

$$4)\quad p\left(x + \frac{q}{p}\right)^2 + \frac{pr - q^2}{p}.$$

Zunächst unterscheiden wir die nachstehenden Fälle:

I. Es sei p negativ, und $pr - q^2$ positiv. Dann sind, wie leicht erhellet, für jeden reellen Werth von x beide Summanden in 4) negativ, es ist also die Wurzel in 2) beständig imaginair, damit auch y beständig imaginair, und es entspricht der Gleichung 1) gar kein Punkt.

II. Es sei p negativ und $pr - q^2$ gleich Null. Der Radicand drückt sich dann aus durch $p\left(x + \frac{q}{p}\right)^2$. Für jeden reellen Werth von x wird dieser Ausdruck negativ, also die Wurzel imaginair, mit Ausnahme des Werthes $-\frac{q}{p}$ für x, bei welchem der Ausdruck und die Wurzel verschwinden. Der Gleichung 1) entspricht also in diesem Fall nur ein einziges Paar reeller Werthe von x und y, und sie liefert einen Punkt.

III. Es sei p negativ und zugleich $pr - q^2$ negativ. Dann ist in dem Radicand

$$p\left(x+\frac{q}{p}\right)^2+\frac{pr-q^2}{p}$$

der zweite Summand positiv, der erste für jeden reellen Werth von x negativ. Der Radicand selbst wird nun positiv, negativ oder gleich Null sein, je nachdem man Werthe von x setzt, welche den ersten Summand kleiner, größer oder gleich dem zweiten machen. Und es wird in dem gegenwärtigen Fall unserer Gleichung eine krumme Linie entsprechen.

IV. Ist p positiv, zugleich $pr-q^2$ positiv, so entspricht der Gleichung ebenfalls eine krumme Linie.

V. Ist p positiv, und $pr-q^2$ gleich Null, so reducirt sich der Radicand auf $p\left(x+\frac{q}{p}\right)^2$ und die Wurzel ist für jeden Werth von x reell. Dann ist

$$y=\frac{-(bx+d)\pm\left(x+\frac{q}{p}\right)\sqrt{p}}{2a}$$

und dieser Gleichung entsprechen zwei gerade Linien, deren eine vermittelst des positiven, die andere durch den negativen Werth der Wurzel erhalten wird.

VI. Ist p positiv und $pr-q^2$ negativ, so entspricht der Gleichung 1) eine krumme Linie.

VII. Ist p gleich Null, so reducirt sich wegen 3) der Radicand in 2) auf $2qx+r$; es ist also

$$y=\frac{-(bx+d)\pm\sqrt{2qx+r}}{2a}.$$

Dieser Gleichung entspricht, wenn q nicht Null ist, eine krumme Linie; ist aber q Null und r positiv, so liefert sie, wie leicht erhellet, zwei parallele gerade Linien; ist q Null und r negativ, so entspricht ihr gar kein Punkt; und sind endlich q und r Null, so liefert sie eine gerade Linie.

Nach dem Bisherigen ergiebt sich folgendes Schema: Ist gegeben die Gleichung

$$ay^2+bxy+cx+dy+ex+f=0$$

und setzen wir

$$b^2-4ac=p$$
$$bd-2ae=q$$
$$d^2-4af=r$$

so entspricht der Gleichung 1)

α) gar kein Punkt, wenn

$$p < 0 \text{ und } pr - q^2 > 0$$

oder wenn $p = 0, \quad q = 0, \quad r < 0$ ist.

Die Gleichung 1) liefert

β) einen Punkt, wenn

$$p < 0 \text{ und } pr - q^2 = 0 \text{ ist}$$

γ) eine gerade Linie, wenn

$$p = q = r = 0,$$

δ) zwei gerade Linien, wenn

$$p > 0 \text{ und } pr - q^2 = 0$$

oder $p = 0, \quad q = 0, \quad r > 0$ ist

ε) eine Curve, wenn

$$p < 0 \text{ und } pr - q^2 < 0$$

oder $p > 0 \text{ und } pr - q^2 \lesseqgtr 0$

oder $p = 0 \text{ und } q \lesseqgtr 0$ ist.

§. 197.

Aus der Gleichung

$$1) \quad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

hatte sich ergeben

$$2) \quad y = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2 + 2(bd-2ae)x + (d^2-4af)}}{2a}.$$

In dem Fall, daß a Null ist, kann dieser Ausdruck nicht gebraucht werden, und es gelten nicht die oben hergeleiteten Resultate.

Die Gleichung 1) ist in Bezug auf x und y symmetrisch. Indem man also x und y, a und c, und d und e vertauscht, gewinnt man aus 2)

$$3) \quad x = \frac{-(by+e) \pm \sqrt{(b^2-4ac)y^2 + 2(be-2cd)y + (e^2-4cf)}}{2c}.$$

Setzt man Null statt a, so entsteht hieraus

$$4) \quad x = \frac{-(by+e) \pm \sqrt{b^2y^2 + 2(be-2cd)y + (e^2-4cf)}}{2c}$$

und es läßt sich nach den Untersuchungen des vorigen Para-

graphen leicht beurtheilen, wann die Gleichung jetzt eine Curve oder eine gerade Linie u. s. w. liefern werde.

Sind a und c gleichzeitig Null, so folgt aus 1)

$$5)\quad y = -\frac{ex+f}{bx+d}.$$

Dieser Gleichung entsprechen immer reelle Werthe von x und y, und sie liefert im Allgemeinen eine krumme Linie. Es ist aber

$$\frac{ex+f}{bx+d} = \frac{e\left(x+\frac{f}{e}\right)}{b\left(x+\frac{d}{b}\right)}$$

und wenn $\frac{f}{e} = \frac{d}{b}$ oder $bf = de$ ist, so entsteht aus 5)

$$6)\quad y = -\frac{e}{b}$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist. Die Gleichung 1) geht, wenn $a = c = 0$ und zugleich $bf = de$ ist, über in

$$bxy + dy + ex + \frac{de}{b} = 0$$

oder in

$$(bx+d)\left(y+\frac{e}{b}\right) = 0$$

so daß sie in dem gegenwärtigen Fall zwei gerade Linien liefert, nämlich die unter 6) und dann

$$7)\quad bx+d = 0.$$

Nach dem vorangegangenen und dem gegenwärtigen Paragraphen läßt sich nun beurtheilen, wann die Gleichung

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

überhaupt eine Curve liefert, oder nicht, und was sie im letzteren Fall gewährt.

§. 198.

I. Die Coefficienten der Gleichung

$$1)\quad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

mögen von der Beschaffenheit sein, daß sie eine Curve liefert. Wir denken eine gerade Linie

$$2)\quad y = px + q,$$

nehmen an, daß sie die Curve schneide und bestimmen die Durchschnittspunkte beider Linien. Zu dem Ende substituiren wir den Werth von y aus der Gleichung 2) in der Gleichung 1) und erhalten

3) $(ap^2+bp+c)x^2+(2apq+bq+dp+e)x+aq^2+dq+f=0.$

Die Werthe von x, welche dieser quadratischen Gleichung entsprechen, sind die Abscissen der verlangten Durchschnittspunkte, deren Ordinaten sich ergeben, wenn man die Werthe der Abscissen in 2) substituirt. Wir wollen die Entwickelung nicht ausführen.

II. Wir bestimmen weiter die Mitte der Sehne. Die Coordinaten derselben seien x′ und y′. Der Werth x′ ist die Hälfte von der Summe der eben gedachten Abscissen. Daher ist

$$4)\quad x' = -\frac{2apq+bq+dp+e}{2(ap^2+bp+c)}$$

und weil diese Mitte in der Linie 2) sich befindet, so ist weiter

$$5)\qquad y' = px'+q.$$

III. Betrachten wir in 2) q als veränderlich, so stellt die Gleichung 2) eine unendliche Anzahl paralleler Linien vor, und die Gleichungen 4) und 5) liefern die Coordinaten der Mitten von den Sehnen, welche den parallelen Linien entspringen. Wir eliminiren aus 4) und 5) den Veränderlichen q; dadurch entsteht, wenn man x′ und y′ als veränderlich betrachtet, die Gleichung für den geometrischen Ort der Mitten aller jener parallelen Sehnen; und es ergiebt sich, wenn wir die Marken unterdrücken

$$6)\quad (2ap+b)y+(bp+2c)x+dp+e = 0.$$

Diese Gleichung ist die einer geraden Linie. Die Mitten von parallelen Sehnen einer Linie der zweiten Ordnung befinden sich also in einer geraden Linie.

Eine gerade Linie, welche parallele Sehnen einer Linie zweiter Ordnung halbirt, heiße ein Durchmesser derselben.

IV. Die Gleichung 6) kann zerlegt werden in

$$7)\qquad 2ay+bx+d = 0$$

$$8)\qquad by+2cx+e = 0.$$

Die Linie 6) geht daher durch den Durchschnittspunkt der Linien 7) und 8). Dieser Punkt ist unabhängig von p. Daraus erhellet, daß alle Durchmesser der Curve sich in demselben Punkte schneiden. Die Coordinaten des Punktes wer-

den erhalten, wenn man x und y aus den Gleichungen 7) und 8) entwickelt; und es entsteht

$$9) \qquad x' = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}$$

$$10) \qquad y' = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}.$$

Diese Coordinaten werden unendlich, wenn $b^2 = 4ac$.

Der vollständige Coefficient von x in der Gleichung 6) ist

$$-\frac{bp + 2c}{2ap + b}.$$

Dafür kann gesetzt werden

$$-\frac{b\left(p + \frac{2c}{b}\right)}{2a\left(p + \frac{b}{2a}\right)}$$

In dem Fall nun, daß $\frac{2c}{b} = \frac{b}{2a}$ oder $4ac = b^2$ ist, geht, dieser Quotient über in $-\frac{b}{2a}$. Er ist unabhängig von p, und alle Durchmesser der Curve sind gegeben durch die Gleichung

$$11) \qquad y = -\frac{b}{2a}x + v$$

in welcher v verschiedene Werthe vorstellt. Alle Durchmesser sind demnach in dem gegenwärtigen Fall parallel.

Die Curven, welche durch die Gleichung 1) gegeben sind, bieten also einen wesentlichen Unterschied dar, je nachdem $b^2 \gtrless 4ac$ oder $b^2 = 4ac$ ist. Im ersten Fall nämlich schneiden sich alle Durchmesser in einem Punkt, im letzteren sind alle ihre Durchmesser parallel.

V. Es sei $b^2 \gtrless 4ac$. Jeder Durchmesser geht dann durch den Punkt x', y' [9), 10)]. Die Gleichung eines jeden Durchmessers läßt sich daher unter der Form

$$y - y' = h(x - x')$$

oder $$12) \qquad y = hx - hx' + y'$$

denken. Man stelle sich alle Sehnen vor, welche mit diesem

Durchmesser 12) parallel sind. Der Durchmesser, welcher solche Sehnen halbirt, hat eine Gleichung von derselben Form 12), also etwa

13) $$y = h'x - h'x' + y'$$

während nach IV

$$h' = -\frac{bh + 2c}{2ah + b}$$

ist. Aus der letzten Gleichung entspringt für h und h' die Bedingungsgleichung:

14) $$2ahh' + b(h + h') + 2c = 0.$$

Diese ist in Bezug auf h und h' symmetrisch. Die Durchmesser 12) und 13) stehen also in gleicher Beziehung zu einander, d. h. jeder halbirt die Sehnen, welche parallel mit dem anderen sind. Solche Durchmesser nennen wir **conjugirte** Durchmesser.

VI. Es sei wieder $b^2 \gtrless 4ac$. Durch den Punkt x', y' [9), 10)] denke man eine Sehne gelegt. Der Durchmesser, welcher diese Sehne halbirt, trifft dieselbe in dem Punkte x' y'. Daraus erhellet, daß der Punkt x', y' alle Sehnen halbirt, welche durch ihn gehen. Der Punkt x', y' wird deshalb der **Mittelpunkt** der Curve genannt.

§. 199.

Die Coefficienten der Gleichung

1) $$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

seien von solcher Beschaffenheit, daß sie eine Curve liefert x' und y' seien die Coordinaten eines Punktes, über dessen Lage wir vorläufig keine Bestimmung machen. Wir verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt. Nach §. 60 geschieht dies, indem wir x + x' und y + y' beziehlich statt x und y in der gegebenen Gleichung setzen. Dadurch entsteht

2) $$ay^2 + bxy + cx^2 + (2ay' + bx' + d)y + (by' + 2cx' + e)x + (ay'^2 + bx'y' + cx'^2 + dy' + ex' + f) = 0.$$

Die erhaltene Gleichung kann vereinfacht werden dadurch, daß wir den neuen Anfangspunkt der Coordinaten zweckmäßig wählen. Zunächst mögen die Coordinaten x' und y' desselben den Bedingungen entsprechen, daß

3) $$2ay' + bx' + d = 0$$

und 4) $$by' + 2cx' + e = 0$$

werde. Bei dieser Annahme des neuen Anfangspunktes verschwinden das vierte und fünfte Glied der Gleichung 2). Die Gleichungen 3) und 4) stimmen mit den Gleichungen 7) und 8) des vorigen Paragraphen überein. Daher ist

$$5) \qquad x' = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}$$

$$6) \qquad y' = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}$$

wie dort, und der neue Anfangspunkt ist kein anderer als der Mittelpunkt der Curve. Diese Umformung kann natürlich nur Statt finden, wenn die Curve einen Mittelpunkt hat, oder mit anderen Worten, wenn $b^2 \gtrless 4ac$ ist.

Das letzte Glied der Gleichung 2) läßt sich wiedergeben durch

$$\left(ay' + \frac{b}{2}x' + \frac{d}{2}\right)y' + \left(\frac{b}{2}y' + cx' + \frac{e}{2}\right)x' + \frac{d}{2}y' + \frac{e}{2}x' + f.$$

Wenn man die Gleichungen 3) und 4) durch 2 dividirt, erhellet, daß die beiden ersten Glieder dieser Summe Null ausmachen, sie selbst sich also reducirt auf

$$\frac{d}{2}y' + \frac{e}{2}x' + f$$

und, wenn man die Werthe unter 5) und 6) substituirt, entsteht

$$\frac{cd^2 + ae^2 - bde + (b^2 - 4ac)f}{b^2 - 4ac}$$

$$= \frac{4acd^2 + 4a^2e^2 - 4abde + 4ab^2f - 16a^2cf + b^2d^2 - b^2d^2}{4a(b^2 - 4ac)}$$

$$= \frac{(bd - 2ae^2)^2 - (b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)}{4a(b^2 - 4ac)}$$

Wir bezeichnen diesen Werth durch V und führen die Werthe unter 5) und 6) von x' und y' in der Gleichung 2) ein; sie geht über in

$$7) \qquad ay^2 + bxy + cx^2 + V = 0$$

eine Form, die jene Gleichung aber nur unter der Voraussetzung erhalten kann, daß $b^2 \gtrless 4ac$.

Das letzte Glied der Gleichung 2) ist von der Form der linken Seite der Gleichung 1). Wenn man daher als neuen

Anfangspunkt x′, y′ irgend einen Punkt der Curve selbst wählt, so verschwindet in der Gleichung 2) das letzte Glied. Und bezeichnen wir durch D und E die Coefficienten des vierten und fünften Gliedes der Gleichung 2), während unter x′ und y′ solche Werthe verstanden werden, welche das letzte Glied verschwinden machen, so geht die Gleichung 2) über in

$$8)\quad ay^2 + bxy + cx^2 + Dy + Ex = 0$$

und die Gleichung 2) kann immer diese einfachere Form annehmen, gleichviel ob die Curve einen Mittelpunkt habe oder nicht.

§. 200. Fortsetzung.

Wir verlegen weiter die Coordinatenachsen, indem wir nach Anleitung des §. 63 statt x und y beziehlich

$$\frac{x\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha) + y\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha')}{\operatorname{Sin}\varphi}$$

und

$$\frac{x\operatorname{Sin}\alpha + y\operatorname{Sin}\alpha'}{\operatorname{Sin}\varphi}$$

setzen. Wir vollführen diese Substitution zunächst an der Gleichung 7), und sie geht über in

$$9)\quad [a\operatorname{Sin}\alpha'^2 + b\operatorname{Sin}\alpha'\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha') + c\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha')^2]y^2$$
$$+ [2a\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\alpha' + b[\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha') - \operatorname{Sin}\alpha'\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha)]$$
$$+ 2c\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha)\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha')]xy + [a\operatorname{Sin}\alpha^2 + b\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha)$$
$$+ c\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha)^2]x^2 + V\operatorname{Sin}\varphi^2 = 0.$$

Die Winkel α und α', welche von der neuen Abscissenachse und von der neuen Ordinatenachse mit der ursprünglichen Abscissenachse gebildet werden, lassen sich dergestalt wählen, daß

$$10)\quad 2a\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\alpha' + b[\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha') + \operatorname{Sin}\alpha'\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha)]$$
$$+ 2c\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha)\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha') = 0$$

werde, und es kann dies, da die Gleichung in Bezug auf α und α' diophantisch ist, in unendlich vielfacher Weise geschehen. Die Gleichung 10) läßt sich wiedergeben durch

$$11)\quad 2a\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{Sin}\alpha'}{\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha')} + b\left[\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha)} + \frac{\operatorname{Sin}\alpha'}{\operatorname{Sin}(\varphi-\alpha')}\right] + 2c = 0$$

Die Ausdrücke $\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha)}$ und $\frac{\operatorname{Sin}\alpha'}{\operatorname{Sin}(\varphi - \alpha')}$, sind, da

φ den ursprünglichen Coordinatenwinkel vorstellt, und α und α' die Winkel bezeichnen, welche von der neuen ersten und der neuen zweiten Achse mit der ursprünglichen Abscissenlinie gebildet werden, nach §. 23 nichts anderes als die Coefficienten von x in den Gleichungen, durch welche die neuen Coordinatenachsen in Bezug auf die alten gegeben sein würden; und vergleicht man die Gleichung 11) mit der unter 14) in §. 198, so erhellet, daß die neuen Achsen conjugirte Durchmesser ausmachen, sobald die Gleichung 11) in Erfüllung geht. Benutzt man als neue Coordinatenachsen irgend eines der unendlich vielen Paare von conjugirten Durchmessern, durch welche die Gleichung 11) in Erfüllung gehen kann, so verschwindet in der Gleichung 9) das zweite Glied, und sie geht über in eine Gleichung von der einfacheren Form

$$12) \qquad Py^2 + Qx^2 + R = 0.$$

Von den unendlich vielen conjugirten Durchmessern, welche die Gleichung 9) auf die Form unter 12) reduciren, wollen wir die beiden einführen, welche normal auf einander stehen, für welche also der neue Coordinatenwinkel ein rechter ist. Eine Vergleichung der Ausdrücke unter 5), 6) in §. 63 mit denen unter 1), 2) lehrt, daß wir nur nöthig haben, in 9) $\mathrm{Cos}\,\alpha$ statt $\mathrm{Sin}\,\alpha'$, und $-\mathrm{Cos}(\varphi-\alpha)$ statt $\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')$ zu setzen, um diese Durchmesser einzuführen; eben so in 10) oder 11). Die Gleichung 10) geht hierdurch über in

$$13) \quad 2a\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha + b\,[\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha) - \mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}(\varphi-\alpha)]$$
$$- 2c\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)\,\mathrm{Cos}(\varphi-\alpha) = 0$$

woraus folgt

$$14) \quad \mathrm{tg}\,\alpha^2 + \frac{2\,(c\mathrm{Cos}2\,\varphi - b\mathrm{Cos}\,\varphi + a)}{(2c\mathrm{Cos}\varphi - b)\,\mathrm{Sin}\varphi}\mathrm{tg}\alpha - 1 = 0.$$

Die Gleichung liefert, da ihr letztes Glied negativ ist, stets reelle Werthe für $\mathrm{tg}\,\alpha$. Wir können also immer die Gleichung 9) auf die Form 12) bringen, während wir dabei auf rechtwinklige Coordinatenachsen übergehen. Die Gleichung 14) liefert zwei Werthe für α, aber beide führen zu demselben Coordinatensystem. Denn sind α' und α'' die beiden Werthe, welche der Gleichung entsprechen, so ist

$$\mathrm{tg}\alpha'\mathrm{tg}\alpha'' = -1$$

oder

$$\mathrm{tg}\alpha' = -\mathrm{Cotg}\,\alpha''$$

folglich

$$\alpha'' = \alpha' + R.$$

Deshalb stehen die Linien, welche wir durch die Winkel

α' und α'' erhalten, auf einander rechtwinklig, und wählen wir die eine derselben zur neuen ersten Achse, so ist die andere die zweite.

Die Gleichung 9) geht bei den angegebenen Substitutionen über in eine Gleichung von der Form

$$15) \qquad Py^2 + Qx^2 + R = 0$$

während

$$16) \quad P = a \operatorname{Cos} \alpha^2 - b \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos}(\varphi - \alpha) + b \operatorname{Cos}(\varphi - \alpha)^2$$

$$17) \quad Q = a \operatorname{Sin} \alpha^2 + b \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin}(\varphi - \alpha) + c \operatorname{Sin}(\varphi - \alpha)^2$$

$$18) \quad R = V \operatorname{Sin} \varphi^2$$

ist. Die Gleichung 15) geht, durch R dividirt über, in

$$\frac{P}{R} y^2 + \frac{Q}{R} x^2 + 1 = 0$$

und setzen wir

$$\frac{P}{R} = -\frac{1}{B^2}, \quad \frac{Q}{R} = -\frac{1}{A^2}$$

so gewinnt die Gleichung die Gestalt

$$19) \qquad A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Wir wollen die Ausdrücke A^2 und B^2 näher bestimmen. Die Addition der Gleichungen 16) und 17) liefert

$$20) \qquad P + Q = a + c - b \operatorname{Cos} \varphi.$$

Wenn man die Gleichungen 16) und 17) mit einander multiplicirt, die Gleichung 13) durch 2 dividirt, quadrirt, und vom Produkt der Gleichung 16) und 17) substrahirt, entsteht

$$21) \qquad PQ = \tfrac{1}{4}(4ac - b^2) \operatorname{Sin} \varphi^2.$$

Aus $\frac{P}{R} = -\frac{1}{B^2}$ und $\frac{Q}{R} = -\frac{1}{A^2}$ folgt leicht

$$22) \qquad \frac{P+Q}{R} = -\frac{A^2+B^2}{A^2B^2}$$

und

$$23) \qquad A^2B^2 = \frac{R^2}{PQ}.$$

Es sei nun $4ac > b^2$. Dann ist PQ etwas Positives wegen der Gleichung 21); und da auch R^2 positiv ist, so folgt aus 23), daß A^2B^2 positiv sein muß, welches weiter bedingt, daß A^2 und B^2 einerlei Vorzeichen haben, also entweder beide positiv sind, oder beide negativ. Es läßt sich zeigen, daß beide positiv sind. Zuvörderst ist $P + Q$ positiv; es ist nämlich nach unserer Annahme

$$b^2 - 4ac < 0$$

also auch $\quad b^2 - 4ac < (a - c)^2$

oder $\quad b^2 < (a + c)^2$

und dann $\quad b < \pm(a + c)$.

Nun haben a und c einerlei Vorzeichen, weil sonst nicht $4ac > b^2$ sein könnte, und man kann immer a und c als positiv betrachten, weil, wenn beide negativ sein sollten, die ursprüngliche Gleichung mit -1 multiplicirt werden kann, wodurch a und c positiv werden, ohne daß die Bedeutung der Gleichung an Allgemeinheit einbüßt. Dann ist also

$$a + c > b$$

also gewiß auch $\quad a + c > b\mathrm{Cos}\varphi$

daher $\quad a + c - b\mathrm{Cos}\varphi = P + Q$

etwas Positives.

Ist nun nach unserer Annahme $b^2 - 4ac < 0$, so muß, wenn der ursprünglichen Gleichung eine Curve entsprechen soll, nach §. 198 auch

$$(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af) - (bd - 2ae)^2 < 0$$

sein. Dann ist der §. 199 durch V bezeichnete Ausdruck, a positiv gedacht, etwas Negatives, also $R = V\mathrm{Sin}\varphi^2$ etwas Negatives, weiter $\frac{P + Q}{R}$ in 22) etwas Negatives, deshalb die Summe $A^2 + B^2$ etwas Positives, und da A^2 und B^2 einerlei Vorzeichen haben, so sind endlich beide positiv.

Die Linie, welche in diesem Fall die Gleichung 19) liefert, ist also dieselbe, welche wir früher Ellipse genannt haben.

Es sei ferner $4ac < b^2$. Dann ist in 21) PQ negativ, also auch nach 23) A^2B^2 negativ, und es haben A^2 und B^2 verschiedene Vorzeichen. Die Gleichung 19) nimmt alsdann eine der Formen an

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$$

oder $\quad -A^2y^2 + B^2x^2 = -A^2B^2$.

Die erste Form ist geradezu die Gleichung der Hyperbel; die andere Gleichung liefert ebenfalls eine Hyperbel, nur daß die Achsen vertauscht erscheinen.

Die Gleichung 1) liefert nach dem Bisherigen, wenn ihr überhaupt eine Curve entspricht, und diese einen Mittelpunkt hat, entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel.

Wir vollführen jetzt weiter die zu Anfange dieses Para-

graphen erwähnte Substitution an der Gleichung 8). Dadurch erhalten wir

$$24)\ [a\mathrm{Sin}\alpha'^2 + b\mathrm{Sin}\alpha'\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha') + c\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')^2]y^2$$
$$+ [2a\ \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}\alpha' + b\ [\mathrm{Sin}\alpha\ \mathrm{Sin}(\varphi-\alpha') + \mathrm{Sin}\alpha'\ \mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)]$$
$$+ 2c\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)\ \mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')]\,xy + [a\mathrm{Sin}\alpha^2 + b\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)$$
$$+ c\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)^2]x^2 + [D\ \mathrm{Sin}\alpha' + E\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')]\ \mathrm{Sin}\varphi\,.\,y$$
$$+ [D\ \mathrm{Sin}\alpha + E\ \mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)]\ \mathrm{Sin}\varphi\ .\ x = 0.$$

Die Winkel α und α' wollen wir dergestalt gewählt denken, daß

$$25)\quad 2a\ \mathrm{Sin}\alpha\ \mathrm{Sin}\alpha' + b\,[\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha') + \mathrm{Sin}\alpha'\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)]$$
$$+ 2c\ \mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)\ \mathrm{Sin}(\varphi-\alpha') = 0$$

und $\quad 26)\ \ D\ \mathrm{Sin}\alpha' + E\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha') = 0$

werde. Diese Gleichungen lassen sich wiedergeben durch

$$2a\ \frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Sin}(\varphi\text{-}\alpha)} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\alpha'}{\mathrm{Sin}(\varphi\text{-}\alpha')} + b\left[\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Sin}(\varphi\text{-}\alpha)} + \frac{\mathrm{Sin}\alpha'}{\mathrm{Sin}(\varphi\text{-}\alpha')}\right] + 2c = 0$$

$$D\ \frac{\mathrm{Sin}\alpha'}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')} + E = 0$$

oder, wenn wir die Ausdrücke $\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)}$ und $\frac{\mathrm{Sin}\alpha'}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha')}$ durch h und h' bezeichnen, durch

$$2ahh' + b(h+h') + 2c = 0$$
$$Dh' + E = 0$$

Hieraus folgt

$$27)\qquad h' = -\frac{E}{D}$$

$$28)\qquad h = \frac{bE - 2cD}{bD - 2aE}.$$

Diese Werthe sind stets reell, folglich können die Winkel α und α' jedesmal dergestalt gedacht werden, daß die Gleichungen 25) und 26) in Erfüllung gehen.

Aus $h = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)}$ folgt $h\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha) = \mathrm{Sin}\,\alpha.$

In dem Coefficienten von x^3 in 24) setzte man statt $\mathrm{Sin}\,\alpha$ den Werth $h\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)$, darauf statt h den Werth aus 28), und es geht dieser Coefficient über in

$$\frac{(4ac-b^2)(cD^2-bDE+aE^2)\,\mathrm{Sin}(\varphi-\alpha)^2}{(bD-2aE)^2}$$

Nehmen wir nun an, daß die den Gleichungen 25) und 26) entsprechenden Werthe von α und α' in 24) gesetzt werden, so verschwinden zunächst die Glieder, welche xy und y enthalten, und der Coefficient von x^2 geht in den eben gefundenen Ausdruck über. Und ist jetzt $b^2-4ac=0$, so verschwindet auch das Glied, welches x^2 enthält, die Gleichung 24) reducirt sich, unter der Voraussetzung, daß $b^2-4ac=0$ ist, auf die Form

$$Ay^2+Bx=0$$

und dies ist die Gleichung der Parabel.

Die bisher gefundenen Resultate haben wir noch in den Fällen zu beleuchten, in welchen einer oder zwei der Coefficienten a, b, c, den Werth Null annehmen. Gleichzeitig können nicht die drei Coefficienten verschwinden, weil sonst die Gleichung 1) in die der geraden Linie zusammenfiele.

Es sei a gleich Null. Ueberblicken wir die Untersuchungen in §. 199 und §. 200, so ist es lediglich der durch V bezeichnete Ausdruck, welchen wir für den Werth Null von a beachten müssen; die Coefficienten D und E erhalten, wenn man sie wirklich bildet, keinen Nenner. Der Ausdruck V erscheint in doppelter Gestalt. In seiner ersten, ursprünglichen Form, Seite 156, hat sein Nenner nicht a als Faktor, in seiner zweiten, Seite 238, enthält sein Nenner den Faktor a; in dieser Gestalt wird der Ausdruck also unbrauchbar, wenn a Null ist. In der letztern Gestalt haben wir aber den Ausdruck V später nur herangezogen unter der Voraussetzung, daß $b^2 < 4ac$, d. h., daß a nicht Null sei; überall sonst kann er in seiner ursprünglichen Form gedacht werden. Der Werth Null von a stört also die Giltigkeit unserer Folgerungen nicht.

Ist b Null, oder c, oder sind a und c gleichzeitig Null, so wird keine Störung herbeigeführt.

Wenn b und c, oder b und a gleichzeitig Null sind, verschwindet in dem Werth V der Nenner; indeß übt dies keinen Einfluß, da V nur unter der Voraussetzung in Betracht kommt, daß $b^2 \gtrless 4ac$. Aber auch in dem Ausdruck unter 28) geht der Nenner in Null über, wenn $a=b=0$ ist, und da wir diesen Ausdruck unter der Annahme gebraucht haben, daß $b^2=4ac$ sei, welches gegenwärtig der Fall ist, so

bleibt noch zu prüfen, ob dies die Giltigkeit der Folgerungen unterbricht. Wir nehmen zuvörderst an, es sei $b = c = 0$. Der Ausdruck unter 28) ist jetzt brauchbar, die Gleichung 1) hat die Gestalt

$$ay^2 + dy + ex + f = 0$$

und sie liefert eine Parabel, da $b^2 - 4ac = 0$ ist. Ist nun $a = b = 0$, so erhält die Gleichung 1) die Form

$$cx^2 + dy + ex + f = 0$$

und diese Gestalt ist die vorige, nur daß x und y vertauscht erscheinen. Daher liefert auch diese Gleichung eine Parabel, während die Achsen gewechselt sind.

Die Gleichung 1) liefert also, wenn sie überhaupt eine Curve giebt, jedesmal entweder eine Ellipse, oder eine Hyperbel, oder eine Parabel, und zwar giebt sie diese Linien, je nachdem

$$b^2 < 4ac$$

$$b^2 > 4ac$$

oder $$b^2 = 4ac \text{ ist.}$$

§. 201.

Durch fünf Punkte, deren Lage beliebig ist, nur mit der Einschränkung, daß nicht drei sich in geraderer Linie befinden, ist eine Linie des zweiten Grades denkbar.

Die Coordinaten der fünf Punkte seien $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5$.

Die Gleichung der Linien des zweiten Grades ist

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Sie enthält sechs Coefficienten, von welchen jedesmal einer auf den Werth Eins gebracht werden kann, indem man die Gleichung durch ihn dividirt. Die Division durch den Coefficienten von y^2 z. B. bringt die Gleichung auf die Form

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Soll diese Gleichung eine Linie gewähren, welche durch den Punkt x_1, y_1 geht, so sind ihre Coefficienten als unbekannt anzusehen, und sie müssen der Bedingungsgleichung entsprechen

$$1) \quad y_1^2 + bx_1y_1 + cx_1^2 + dy_1 + ex_1 + f = 0.$$

Und soll die Linie gleichzeitig durch die Punkte x_2, y_2 u. s. w. gehen, so müssen die Coefficienten ferner den Bedingungsgleichungen

$$2)\ y_2^2 + bx_2y_2 + cx_2^2 + dy_2 + ex_2 + f = 0$$
$$3)\ y_3^2 + bx_3y_3 + cx_3^2 + dy_3 + ex_3 + f = 0$$
$$4)\ y_4^2 + bx_4y_4 + cx_4^2 + dy_4 + ex_4 + f = 0$$
$$5)\ y_5^2 + bx_5y_5 + cx_5^2 + dy_5 + ex_5 + f = 0$$

genügen. Es entstehen also fünf Gleichungen des ersten Grades für die fünf Unbekannten b, c, d, e, f, durch welche sie vollkommen bestimmt sind, und aus denen sie sich entwickeln lassen; und wenn man die Werthe, welche diese Gleichungen für die genannten Unbekannten liefern, in

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

substituirt, so wird die letzte Gleichung eine Linie zweiten Grades gewähren, in der die fünf Punkte enthalten sind.

Eine Linie des zweiten Grades und eine gerade Linie haben nie mehr als zwei Punkte gemein. Deshalb können drei Punkte, welche sich in gerader Linie befinden, nicht zugleich in einer Linie zweiten Grades vorkommen. Das ist der Grund zu der oben gemachten Beschränkung.

Die Gleichungen für die Unbekannten b, c, d, e, f sind einfache, und liefern für jeden derselben einen Werth. Deshalb giebt es nur eine Linie zweiten Grades, welche durch fünf gegebene Punkte geht, d. h. mit anderen Worten, eine Linie zweiten Grades ist durch fünf Punkte bestimmt.

Durch weniger als fünf Punkte lassen sich unendlich viele Linien zweiten Grades legen, durch mehr als fünf Punkte, die beliebig gewählt sind, kann nicht eine Linie zweiten Grades gefordert werden.

Während eine Linie zweiten Grades besteht, welche fünf gegebene Punkte in sich aufnimmt, läßt sich nicht bedingen, daß jene Linie gerade eine Ellipse sein soll, oder eine Parabel, oder eine Hyperbel, sondern die Lage der Punkte bestimmt die besondere Natur der Linie.

Durch vier beliebige Punkte läßt sich im Allgemeinen eine bestimmte Linie zweiten Grades legen. Denn außer den vier Bedingungsgleichungen, welche die Coordinaten der Punkte gewähren, läßt sich im Allgemeinen noch die Gleichung

$$b^2 - 4ac = q$$

in Erfüllung bringen, und je nachdem man für q ganz beliebig einen positiven, oder einen negativen Werth, oder Null setzt, wird eine Hyperbel, oder eine Ellipse oder eine Parabel hervorgehen. Und da für q unendlich viele positive oder negative Werthe gesetzt werden können, so lassen sich im Allgemeinen unendlich viele Hyperbeln oder Ellipsen durch die vier Punkte denken, aber der Parabeln werden nicht mehr als zwei sich erlangen lassen, vermittelst der Gleichung $b^2 - 4ac = 0$. In besonderen Fällen kann die eine oder die andere Gattung der Linien unmöglich sein.

Uebungen und Praktisches.

§. 202. Aufgabe.

Es ist, Fig. 55, ein Vieleck durch die Coordinaten seiner Eckpunkte gegeben, und man soll den Inhalt des Vielecks bestimmen.

Auflösung. Die Coordinaten der Eckpunkte A_1, A_2, A_3 u. s. w. seien beziehlich x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 u. s. w. Aus der Ansicht der Figur giebt sich leicht zu erkennen, daß der Inhalt des Fünfecks $A_1A_2A_3A_4A_5$ sich ausdrückt durch

$$\tfrac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)+(y_3+y_4)(x_4-x_3)$$
$$+(y_4+y_5)(x_5-x_4)+(y_5+y_1)(x_1-x_5)]\operatorname{Sin}\varphi$$

oder durch

$$1)\ \tfrac{1}{2}[y_1x_2-y_2x_1+y_2x_3-y_3x_2+y_3x_4-y_4x_3+y_4x_5$$
$$-y_5x_4+y_5x_1-y_1x_5]\operatorname{Sin}\varphi$$

oder

$$2)\ \tfrac{1}{2}[(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_5+y_5x_1)-(x_1y_2+x_2y_3$$
$$+x_3y_4+x_4y_5+x_5y_1)]\operatorname{Sin}\varphi.$$

Das Gesetz in den Ausdrücken liegt zu Tage, und es leidet keinen Zweifel, daß es auf beliebige Vielecke anzuwenden ist. Die einzige Vorsicht, welche man zu beobachten hat, besteht darin, einen Eckpunkt als ersten zu wählen und die übrigen nach einerlei Richtung hin zu beziffern.

Die Figur kann in solcher Lage vorkommen, daß sie von den Coordinatenachsen geschnitten wird. Auch dadurch leidet keiner der obigen Ausdrücke eine Aenderung. Man kann näm-

lich immer den Anfangspunkt der Coordinaten dergestalt verlegen, daß die Figur in die erste Region gelangt. Solches Verlegen auszuführen muß $x+a$ statt jedes x, und $y+a$ statt jedes y gesetzt werden. Bezeichnen nun x_1, y_1, x_2, y_2 u. s. w. die ursprünglichen Coordinaten, so sind x_1+a, y_1+b, x_2+a, y_2+b u. s. w. die Coordinaten der Eckpunkte, während der Anfangspunkt verlegt ist, und der Inhalt der Figur wird erhalten, indem man in 1) oder 2) die letzten Ausdrücke statt x_1 und y_1 u. s. w. setzt. Dabei heben sich aber alle mit a oder b behafteten Ausdrücke, so daß die Formeln 1) und 2) übrig bleiben, in welchen dann nur die ursprünglichen Coordinaten erscheinen.

§. 203. Aufgabe.

Es ist, Fig. 56, eine Parabel gegeben durch ihre Gleichung $y^2 = px$; auf der Achse ist ein Punkt N gegeben durch seine Abscisse a, durch ihn geht eine Sehne AB unter dem Winkel α gegen die Achse geneigt: man soll den Parabelabschnitt ABC berechnen.

Auflösung. Durch die Mitte D der Sehne AB werde DC parallel der Achse gedacht. Nach §. 107 drückt sich alsdann der Inhalt des Parabelabschnittes aus durch $\frac{4}{3}\Delta ABC$. Es kommt also darauf an, den Inhalt des Dreiecks ABC zu ermitteln. Die Coordinaten des Punktes C seien x' und y'. Es werde die Tangente CV des Scheitels C gedacht. Sie ist parallel mit der Sehne AB, bildet deshalb mit der Achse den Winkel α. Nach §. 80 5) und §. 23 3) ist nun

$$\frac{p}{2y'} = \operatorname{tg}\alpha$$

daraus
$$y' = \frac{p}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ferner ist
$$y'^2 = px'$$

also, wenn man für y' den eben gefundenen Werth setzt

$$x' = \frac{p}{4\operatorname{tg}\alpha^2}.$$

Es ist
$$CD = NO + OV$$

oder
$$CD = a + \frac{p}{4\operatorname{tg}\alpha^2}.$$

In Bezug auf die conjugirten Achsen CD und CV ist wegen §. 90

$$AD^2 = \frac{p}{\operatorname{Sin}\alpha^2} CD$$

$$= \frac{p}{\operatorname{Sin}\alpha^2}\left(a + \frac{p}{4\operatorname{tg}\alpha^2}\right).$$

Der Inhalt des Dreiecks ADC ist gleich

$$\frac{AD \,.\, CD \,.\, \operatorname{Sin}\alpha}{2}$$

der des Dreiecks ABC gleich $AD \,.\, CD \operatorname{Sin}\alpha$, oder, wenn man die Werthe für CD und AD setzt

$$\left(a + \frac{p}{4\operatorname{tg}\alpha^2}\right)\sqrt{p\left(a + \frac{p}{4\operatorname{tg}\alpha^2}\right)}$$

folglich ist der Inhalt des Parabelabschnittes ABC gleich

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{p\left(a + \frac{p}{4\operatorname{tg}\alpha^2}\right)^3}.$$

§. 204. Aufgaben.

I. Von einer Parabel ist die Achse gegeben, der Scheitelpunkt, und noch ein anderer Punkt Q; man soll die Parabel construiren.

Auflösung. Man fälle von Q aus eine Normale auf die Achse, und man hat die Coordinaten x und y des Punktes Q. Es muß dann $y^2 = px$ sein. Hieraus folgt

$$x : y = y : p.$$

Nach dieser Proportion kann p construirt werden, und ist es gefunden, so lassen sich nach §. 108 beliebig viele Punkte der Parabel angeben.

II. Von einer Parabel sind die Achse gegeben und zwei Punkte Q und Q′, man soll die Parabel construiren.

Auflösung. Man fälle von den Punkten Q und Q′ Normalen y und y′ auf die Achse, und man hat die Ordinaten der gegebenen Punkte, und in ihrem normalen Abstande d die Differenz der zugehörigen Abscissen x und x′. Es ist dann

$$y'^2 = px'$$

$$y^2 = px$$
$$y'^2 - y^2 = p(x' - x) = pd.$$

Daraus folgt

$$d : y' - y = y' + y : p.$$

Nach dieser Proportion construire man p, dann x aus $y^2 = px$; vermittelst x bestimmt sich der Scheitelpunkt, und hat man diesen, so läßt sich verfahren, wie in I.

III. Von einer Ellipse ist die große Achse 2a und ein Punkt Q der Ellipse gegeben, man soll die Ellipse construiren.

Auflösung. Es kommt darauf an, die kleine Achse zu ermitteln. Man fälle von Q eine Normale auf die große Achse, und man hat alsdann die Coordinaten x und y des Punktes Q, und für die kleine Achse 2b die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Daraus folgt

$$ay = b\sqrt{a^2 - x^2}$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} : a = y : b$$

und nach dieser Proportion kann b construirt werden.

Dieselbe Aufgabe läßt sich für die Hyperbel stellen, und in ähnlicher Weise lösen.

§. 205.

Die Kreise, Fig. 57, sind concentrisch; die Halbmesser a und b stehen normal auf einander. Wird MH beliebig gezogen, von H aus die Normale HL auf MC, von G aus die Normale GV auf MD gefällt, so ist der Durchschnittspunkt Q beider Normalen ein Punkt der Ellipse, welche 2a und 2b zu Achsen hat, und deren Scheitelpunkte C, C', D, D' sind.

Es verhält sich nämlich

$$MH : MG = LH : LQ$$

oder $$a : b = \sqrt{a^2 - x^2} : y$$

und daraus folgt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

§. 206.

Die Durchschnittslinie zwischen dem Mantel eines nor-

malen Cylinders und einer Ebene, welche nicht mit der Grundebene parallel ist, noch mit den Seiten, ist eine Ellipse.

Man denke, Fig. 58, einen normalen Cylinder; der Radius seiner Grundebene sei r. Der Cylinder werde durch eine Ebene E geschnitten, welche mit der Grundebene den Winkel α bildet. Die Durchschnittsfigur CLDK zwischen dem Mantel des Cylinders und der Ebene E ist, der Behauptung gemäß, eine Ellipse. — Durch die Achse des Cylinders werde eine Ebene F gedacht, welche normal steht auf der Ebene E. Die Ebene F schneide den Cylindermantel in den Seiten AC und BD, die Ebene E in der Linie CD. In der Linie CD werde der Punkt N beliebig angenommen und durch ihn eine Ebene G gedacht, parallel mit der Grundebene des Cylinders. Die Ebene G schneide den Mantel des Cylinders in dem Kreise HLJK, die Ebene E in der Linie KL, die Ebene F in der Linie HJ. Die Achse des Cylinders steht normal auf der Ebene G, daher steht auch die durch die Achse gelegte Ebene F normal auf der Ebene G, oder, was dasselbe ist, G normal auf F. Die Ebenen E und F sind normal auf einander angenommen. Es stehen also die beiden Ebenen E und G normal auf der Ebene F, deshalb steht ihre Durchschnittslinie KL normal auf F, und dann weiter normal auf den in der Ebene F befindlichen Linien CD und HJ. Dann ist der Winkel DNJ gleich α, und

$$NL^2 = JN . NH$$

oder $$y^2 = x\mathrm{Cos}\,\alpha(2r - x\mathrm{Cos}\,\alpha)$$

oder $$y^2 = 2r\mathrm{Cos}\,\alpha . x - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 . x^2.$$

Diese Gleichung bleibt dieselbe, wo man auch den Punkt N in der Linie CD annehmen mag, d. h. während man die Entfernung DN oder x als veränderlich betrachtet. Die Gleichung ist aber die der Ellipse, also erhellet die Behauptung.

Die Durchschnittsfigur zwischen einer Ebene und dem Mantel eines schiefen Cylinders, oder dem Mantel eines Cylinders, dessen Grundebene eine Ellipse ist, ist gleichfalls eine Ellipse.

§. 207.

Die Durchschnittslinie zwischen dem Mantel eines normalen Kegels und einer Ebene, die nicht durch dessen Spitze geht, ist eine Linie zweiten Grades.

Man denke, Fig. 59, einen normalen Kegel; jede seiner Seiten bilde mit der Achse den Winkel α. Der Kegel werde

durch eine Ebene E geschnitten, welche nicht durch seine Spitze geht. Die Durchschnittsfigur LDK ist, der Behauptung nach, eine Linie zweiten Grades. — Durch die Achse des Kegels denke man eine Ebene F normal auf der Ebene E. Die Ebene F schneide den Kegelmantel in den Seiten AB und AC, die Ebene E in der Linie ND. In der Ebene F werde DV normal zur Achse gezogen; DV kann als bekannt gelten und es werde gleich c gesetzt. β ist der Winkel, welchen die Ebene E mit der Seite AC bildet. Durch die Seite AC, c und β ist die Lage der Ebene E gegen den Kegel bestimmt. Durch den beliebigen Punkt N der Linie DN denke man weiter eine Ebene G normal zur Achse. Die Ebene G schneide den Mantel des Kegels in dem Kreise BLCK, die Ebene E in der Linie KL, die Ebene F in der Linie BC. Die Ebenen E und G stehen normal auf der Ebene F, daher ist ihre Durchschnittslinie KL normal auf F, also auch KL normal auf den Linien ND und BC. Man hat nun

$$NL^2 = NC . NB.$$

Aus dem Dreieck CDN ist

$$NC = \frac{x \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} NCD} = \frac{x \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} \alpha}.$$

In der Ebene F ziehe man NH parallel BA, und es ist

$$BN = VH = c - DH.$$

Aus dem Dreieck NDH ist

$$DH = \frac{x \operatorname{Sin} DNH}{\operatorname{Sin} DHN}.$$

Es ist aber $\operatorname{Sin} DHN = \operatorname{Sin} DVB = \operatorname{Sin} DVA = \operatorname{Cos} \alpha$ und wenn man DQ parallel AB denkt, folgt

$$\angle DNH = NDQ = \beta - 2\alpha.$$

Also ist

$$DH = \frac{x \operatorname{Sin} (\beta - 2\alpha)}{\operatorname{Cos} \alpha}.$$

Die erhaltenen Werthe setze man oben und es entsteht

$$NL^2 = \frac{x \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} \alpha} \left[c - \frac{x \operatorname{Sin} (\beta - 2\alpha)}{\operatorname{Cos} \alpha} \right]$$

oder

$$y^2 = \frac{c \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} \alpha} . x - \frac{\operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\beta - 2\alpha)}{\operatorname{Cos} \alpha^2} . x^2.$$

Diese Gleichung besteht, wo auch der Punkt N in der Linie ND angenommen sein mag, d. h. während ND oder x veränderlich gedacht wird. Sie ist also die der Durchschnittsfigur zwischen der Ebene E und dem Kegelmantel.

Es muß aber unterschieden werden, ob β gleich 2α ist, oder ob β größer ist als 2α, oder kleiner als 2α. Ist β gleich 2α, so verschwindet das mit x^2 behaftete Glied der Gleichung, und die Durchschnittsfigur ist eine Parabel; ist β größer als 2α, so ist dies Glied negativ, und die Durchschnittsfigur eine Ellipse; und ist endlich β kleiner als 2α, so wird das gedachte Glied positiv, die Durchschnittsfigur eine Hyperbel.

Die sämmtlichen Linien des zweiten Grades kommen also als Durchschnittslinien zwischen dem Mantel eines normalen Kegels und einer Ebene vor, die nicht durch seine Spitze geht; und umgekehrt, jede solche Durchschnittslinie ist eine Linie zweiten Grades, und zwar eine Parabel, wenn die Ebene parallel mit einer Seite des Kegels geht; eine Ellipse, wenn die Ebene sämmtliche Seiten selbst schneidet; eine Hyperbel, wenn sie die einen Seiten selbst schneidet, die übrigen in ihrer Verlängerung jenseits der Spitze. Wegen dieses Umstandes nennt man die Linien zweiten Grades K e g e l s c h n i t t e.

Die Durchschnittslinie zwischen dem Mantel eines schiefen Kegels und einer Ebene ist gleichfalls eine Linie zweiten Grades.

§. 208.

Die Projection einer Parabel, einer Ellipse oder einer Hyperbel ist beziehlich eine Parabel, eine Ellipse, oder eine Hyperbel.

Man denke eine Ebene E, in ihr eine Linie zweiten Grades, deren Gleichung für beliebige Coordinatenachsen

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

sein mag. Die Ebene E sei gegen eine Projectionsebene P′ unter einem beliebigen schiefen Winkel geneigt, und dabei bilde die in der Ebene E befindliche Abscissenachse mit der Projectionsebene P′ den Winkel α, die Ordinatenachse mit P′ den Winkel β. Die Curve und ihre Coordinatenachsen denke man auf P′ projicirt. Für die Projection der Curve nehme man die Projectionen der Coordinatenachsen als Coordinatenachsen. Sind dann x und y die Coordinaten irgend eines Punktes Q der Curve in der Ebene E, x′ und y′ die Projectionen von

x und y auf P', und ist Q' die Projection von Q, so sind x' und y' die Coordinaten des Punktes Q', und nach einem bekannten Satze der beschreibenden Geometrie ist

$$x' = x \cos\alpha$$
$$y' = y \cos\beta.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{x'}{\cos\alpha}, \qquad y = \frac{y'}{\cos\beta}$$

und wenn man diese Werthe oben substituirt, entsteht

$$\frac{a}{\cos\beta^2}y'^2 + \frac{b}{\cos\alpha\cos\beta}x'y' + \frac{c}{\cos\alpha^2}x'^2 + \frac{d}{\cos\beta}y' + \frac{e}{\cos\alpha}x' + f = 0$$

als Gleichung der Projection; und je nachdem

$$b^2 \gtreqless 4ac$$

ist offenbar auch

$$\frac{b^2}{\cos\alpha^2\cos\beta^2} \gtreqless \frac{4ac}{\cos\alpha^2\cos\beta^2}.$$

Daraus erhellet die Behauptung.

§. 209.

Die Gleichungen:

1) $3y^2 + 2xy - 5x^2 - 13y - 11x + 12 = 0$
2) $5y^2 - 3x^2 + 8x = 0$
3) $9y^2 + x^2 + 36y + 2x + 28 = 0$
4) $y^2 - 6xy + 10x^2 + 4y - 12x + 4 = 0$
5) $5y^2 - 30y - 8x + 53 = 0.$

beziehen sich auf rechtwinklige Coordinaten; man soll die Linien bestimmen, welche sie gewähren.

Die Gleichung 1) liefert zwei gerade Linien, nämlich die Linien

$$y - x - 3 = 0$$

und

$$3y + 5x - 4 = 0.$$

Die Gleichung 2) liefert eine Hyperbel, deren Hauptachse und Nebenachse beziehlich $\frac{4}{3}$ und $\frac{1}{\sqrt{15}}$ sind.

Die Gleichung 3) giebt eine Ellipse. Die Coordinaten ihres Mittelpunktes sind -1 und -2, die große Achse und die kleine sind beziehlich 3 und 1.

Die Gleichung 4) gewährt nur einen Punkt; seine Coordinaten sind 0 und -2.

Die Gleichung 5) giebt eine Parabel. Die Coordinaten des Scheitelpunktes sind 1 und 3, die Gleichung für die Hauptachsen ist $y^2 = \frac{8}{5}x$.

Zweiter Abschnitt.

Fünftes Kapitel.

Von den Curven einfacher Krümmung im Allgemeinen.

§. 210.

Eine krumme Linie heißt von einfacher Krümmung, wenn sie in einer Ebene sich denken läßt, von doppelter Krümmung, wenn das der Fall nicht ist. Wir handeln im gegenwärtigen Abschnitt nur von Curven einfacher Krümmung.

§. 211.

Es sei $y = f_x$ die Gleichung einer Curve. Den Abscissen x, $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx\ldots$ Fig. 60 mögen die Ordinaten y, y', y'', $y'''\ldots$ entsprechen. B, B', B'', $B'''\ldots$ sind dann unmittelbar auf einander folgende Punkte der Curve. Man denke die Linien BC', $B'C''$, $B''C'''\ldots$ parallel der ersten Achse, und es sind $B'C'$, $B''C''$, $B'''C'''\ldots$ die ersten Differentiale beziehlich von y, y', $y''\ldots$ Man ziehe ferner $B'D''$ parallel $C'C''$, $B''D'''$ parallel $C''C'''\ldots$ und es liegen in $B''D''$, $B'''D'''$, die Differenzen zwischen den ersten Differentialen also die zweiten Differentiale von y, y',... vor.

Sind die zweiten Differentiale der y sämmtlich Null, so sind die ersten Differentiale einander gleich und die Gleichung $y = f_x$ liefert eine gerade Linie. Sind die zweiten Differentiale nicht sämmtlich Null, so sind die ersten verschieden, und die Gleichung gewährt eine krumme Linie. Der aufsteigende oder niedersteigende Fortgang der Curve, und ob sie ihre concave Seite nach oben oder nach unten kehrt, bestimmt sich aus den Vorzeichen des ersten und des zweiten Differentials von y.

In Fig. 61 sind dy und d^2y positiv, in Fig. 62 ist dy positiv, d^2y negativ, Fig. 63 ist dy negativ, d^2y positiv, Fig. 64 sind dy und d^2y negativ. Eine Curve steigt demnach aufwärts so lange das erste Differential der Ordinate positiv, sie geht abwärts, wenn das erste Differential der Ordinate negativ ist.

Und die concave Seite der Curve liegt nach oben, wenn das zweite Differential positiv, nach unten, wenn es negativ ist.

Verbindungen dieser Fälle wird man leicht selbst aufstellen.

§. 212.

Wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt ist, setzen wir hier stets rechtwinklige Coordinaten voraus.

Tangente, Normale.

§. 213.

Ist $y = f_x$ die Gleichung einer Curve, und sind x' und y' die Coordinaten eines Punktes Q dieser Curve, so ist

$$y - y' = \partial f_{x'} (x - x')$$

die Gleichung der geraden Linie, welche jene Curve in dem Punkte Q berührt.

Wir wollen dies Gesetz in verschiedener Weise herleiten, nach verschiedenen Gesichtspunkten, die man kann gelten lassen.

1) Es sei, Fig. 65 und Fig. 66, CQD die krumme Linie, welche der Gleichung $y = f_x$ entspricht, und GH die gerade Linie, welche die Curve in dem Punkte Q berührt. Die Gleichung der geraden Linie GH sei

$$y = ax + b.$$

Die Coefficienten a und b sind unbekannt, und der Bedingung gemäß zu ermitteln, daß die gerade Linie die Curve berühre in dem Punkte Q, dessen Coordinaten x' sind und y'.

Die gerade Linie muß den Punkt Q enthalten, daher hat man

$$1) \quad y' = ax' + b.$$

Die beiden Punkte C und D der Curve, welche dem Punkte Q zunächst liegen, müssen sich auf einer Seite der geraden Linie befinden, deshalb müssen die Differenzen

$$CN - GN \text{ und } DV - HV$$

beide positiv (Fig. 66) oder beide negativ (Fig. 65) sein, d. h. es müssen die Differenzen

$$f_{x'-h} - [a(x'-h) + b] \text{ und } f_{x'+h} - [a(x'+h) + b]$$

beide positiv sein oder beide negativ, während h dx vorstellt. Die Differenzen gehen, indem man Taylors Satz anwendet, über in

$$f_{x'} - \partial f_{x'} h + \partial f_{x'} \frac{h^2}{2!} - \dots - ax' + ah - b$$

und $$f_{x'} + \partial f_{x'} h + \partial^2 f_{x'} \frac{h^2}{2!} + \dots - ax' - ah - b$$

oder, da nach 1) $ax' + b = y' = f_{x'}$ ist, in

$$(a - \partial f_{x'}) h + \partial^2 f_{x'} \frac{h^2}{2!} - \dots$$

und $$(\partial f_{x'} - a) h + \partial^2 f_{x'} \frac{h^2}{2!} + \dots$$

h ist dx; daher haben die Werthe dieser Reihen einerlei Vorzeichen mit ihren ersten Gliedern. So lange also $a - \partial f_{x'}$ etwas Positives ist, oder etwas Negatives, so lange haben die Werthe der Reihen entgegengesetzte Vorzeichen, und sollen sie einerlei Vorzeichen führen, so muß in jeder der beiden Reihen das erste Glied verschwinden. Das liefert die zweite Bedingungsgleichung für die Coefficienten der geraden Linie, nämlich

$$2) \quad a = \partial f_{x'}.$$

Aus 1) und 2) bestimmen sich a und b, und substituirt man die Werthe in $y = ax + b$, so entsteht

$$y - y' = \partial f_{x'} (x - x')$$

als Gleichung der geraden Linie, welche die Curve $y = f_x$ in dem Punkte Q berührt, dessen Coordinaten x' und y' sind. Bei rechtwinkligen Coordinaten ist der Coefficient a die Tangente des Winkels α, unter welchem die gerade Linie gegen die Abscissenachse geneigt ist; daher ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \partial f_{x'}.$$

Wenn für den besonderen Werth x' von x die Ableitung $\partial^2 f_{x'}$ verschwindet, oder die Ableitungen $\partial^2 f_{x'}$ und $\partial^3 f_{x'}$ in Null übergehen u. s. f., so findet eine eigenthümliche Berührung Statt, von der etwas später wird gehandelt werden.

II) Es sei, Fig. 67, CQD die Curve, deren Gleichung $y = f_x$ ist, TH die Tangente in Q. Man betrachte die Curve als zusammengesetzt aus unendlich vielen unendlich kleinen geraden Linien. Die Tangente in Q fällt dann zusammen mit dem Element der Curve, welches den Punkt Q enthält. Man denke OV gleich $x' + dx$, die Ordinate VH, und ziehe QS parallel der ersten Achse. Der Punkt H liegt dann in dem Element der Curve, welches den Punkt Q enthält, und es ist

$QS = dx$, $SH = dy'$, der Winkel HQS ist gleich α, und man hat sofort

$$tg\alpha = \frac{HS}{QS} = \frac{dy'}{dx} = \partial f_{x'}$$

demnach die Gleichung der Tangente wie oben

$$\frac{y-y'}{x-y'} = \partial f_{x'}.$$

III) Es sei, Fig. 68, CQD die Curve zur Gleichung $y = f_x$, TQ ihre Tangente in Q. Man nehme OV gleich $x' + \Delta x'$, errichte die Ordinate VS, und ziehe QN parallel der ersten Achse. Dann ist $QN = \Delta x'$, $NS = f_{x'+\Delta x'} - f_{x'} = \Delta f_{x'}$. Durch die Punkte Q und S lege man die Secante QS. Es ist $tg\varphi = tgSQN = \frac{SN}{QN}$; und deshalb ist

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{\Delta f_{x'}}{\Delta x'}.$$

die Gleichung der Secante QS. Man lasse $\Delta x'$ abnehmen; dabei rückt der Punkt S dem Punkte Q näher, und die Secante QS dreht sich um den Punkt Q; in dem Moment des Verschwindens von $\Delta x'$ fällt S in Q, und die Secante wird zur Tangente; läßt man $\Delta x'$ weiter abnehmen, d. h. negativ werden, so tritt S wieder aus Q heraus, bewegt sich nach C zu, und QS erscheint von neuem als Secante. Lassen wir also in der obern Gleichung für QS den Werth $\Delta x'$ abnehmen bis zum Verschwinden, so geht in dem Moment des Verschwindens von $\Delta x'$ die Gleichung in die der Tangente QT über. In dem Moment des Verschwindens von $\Delta x'$ ist aber $\frac{\Delta f_{x'}}{\Delta x'} = \partial f_{x'}$, folglich hat man

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \partial f_{x'}$$

als Gleichung der Tangente für den Punkt Q.

In welchem Quadranten der Winkel sich befindet, dessen Tangente gleich ist ∂f_x oder $\frac{dy}{dx}$ entscheiden die Vorzeichen von dx und dy.

§. 214. Aufgabe.

Es ist eine Curve $y = f_x$ gegeben, außerhalb derselben

ein Punkt P durch seine Coordinaten a und b; man soll den Berührungspunkt drr Tangente bestimmen, welche von P aus an die Curve sich legen läßt.

Auflösung. Die Gleichung einer durch P gehenden Tangente für die Curve $y = f_x$ ist, wenn x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen,

$$b - y' = \partial f_{x'} (a - x')$$

oder, da $y' = f_{x'}$,

$$b - f_{x'} = \partial f_{x'} (a - x')$$

Aus dieser Gleichung entwickele man den Werth von x' und man erhält in ihm die Abscisse des Berührungspunktes. Ergeben sich mehrere Werthe für x', so bestehen eben so viele durch P gehende Tangenten für die Curve.

§. 215.

Und sollte der Berührungspunkt derjenigen Tangente ermittelt werden, welche mit der Abscissenachse den Winkel β bildet, so hätte man aus

$$\operatorname{tg}\beta = \partial f_{x'}$$

x' algebraisch zu entwickeln, und alsdann in diesem x' die Abscisse des verlangten Berührungspunktes.

§. 216. Aufgabe.

Es ist eine Curve $y = f_x$ gegeben, in ihr ein Punkt Q durch seine Coordinaten x' und y'; man soll die Subtangente bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung der Tangente ist

$$y - y' = \partial f_{x'} (x - x')$$

und man erhält nach §. 83 aus ihr die Subtangente, indem man Null statt y setzt und $x - x'$ entwickelt. Es entsteht

$$\text{Subtg} = -\frac{y'}{\partial f_{x'}} = -\frac{f_{x'}}{\partial f_{x'}}.$$

§. 217. Aufgabe.

Es ist eine Curve $y = f_x$ gegeben, in ihr ein Punkt Q durch seine Coordinaten x' und y', man soll die Gleichung der Normale für den Punkt Q herleiten.

Auflösung. Nach den Paragraphen 35 und 213 hat man sofort

$$y - y' = -\frac{1}{\partial f_{x'}} (x - x')$$

oder $(y - y')\partial f_{x'} + x - x' = 0$

als die verlangte Gleichung der Normale.

§. 218.

Und wäre außerhalb einer Curve $y = f_x$ ein Punkt P gegeben durch seine Coordinaten a und b, und sollte von P aus eine Normale auf die Curve gefällt werden, so hätte man aus der Gleichung

$$(b - f_{x'})\partial f_{x'} + a - x' = 0$$

x' algebraisch zu entwickeln, um die Abscisse desjenigen Punktes der Curve zu erhalten, welcher von der Normale getroffen wird. Ergeben sich mehrere Werthe von x', so bestimmen diese eben so viele durch den Punkt Q gehende Normalen.

§. 219.

Soll eine Normale den Winkel γ mit der Abscissenachse bilden, so findet sich die Abscisse des Punktes der Curve, welcher von dieser Normale getroffen wird, wenn man x' aus der Gleichung

$$tg\gamma = -\frac{1}{\partial f_{x'}}$$

algebraisch entwickelt.

§. 220. Aufgabe.

Es ist eine Curve $y = f_x$ gegeben, und ein Punkt Q derselben durch seine Abscisse x', man soll die Subnormale bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung der Normale ist

$$(y - y')\partial f_{x'} + x - x' = 0$$

und sie liefert die Subnormale, indem man Null statt y setzt und $x - x'$ entwickelt. Es entsteht

$$\text{Subn.} = y'\partial f_{x'} = f_{x'}\,\partial f_{x'}\,.$$

§. 221.

Wenn die Gleichung einer Curve in der Form

$$F_x = 0$$

gegeben ist, hat man

$$\partial F_y\,\partial y_x + \partial F_x = 0$$

also

$$\partial y_x = -\frac{\partial F_x}{\partial F_y}$$

Diesen Werth substituire man in §. 213 und §. 217 und man erhält als Gleichung der Tangente

$$(y-y')\partial F_{y'}+(x-x')\partial F_{x'}=0$$

und als Gleichung der Normale

$$(y-y')\partial F_{x'}-(x-x')\partial F_{y'}=0.$$

§. 222.

Asymptoten sind als Tangenten zu betrachten für unendlich entfernte Punkte. Ob Asymptoten bestehen, entscheidet sich, und ihre Gleichungen werden erhalten, wenn man in der allgemeinen Gleichung der Tangente

$$(y-y')\partial F_{y'}+(x-x')\partial F_{x'}=0$$

y' durch x' ausdrückt, und $\pm\infty$ statt x' setzt, dann auch x' durch y' ausdrückt und $\pm\infty$ statt y' setzt. Im ersten Fall erhält man nämlich die Asymptoten nicht, welche etwa mit der zweiten Achse parallel gehen oder zusammenfallen, im anderen bleiben die aus, welche vielleicht mit der ersten Achse parallel gehend, oder in ihr liegend bestehen.

§. 223.

Die Kegelschnitte mögen zunächst als Beispiele für die bisherigen Bestimmungen dienen.

Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2=px$$

demnach

$$2y\partial y_x=p$$

und

$$\partial y_x=\frac{p}{2y}$$

also die Gleichung der Tangente

$$y-y'=\frac{p}{2y'}(x-x')$$

und die der Normale

$$y-y'=-\frac{2y'}{p}(x-x').$$

Ferner ist

$$\text{Subtg}=-\frac{y}{\partial y_x}=-\frac{2y^2}{p}=-2x$$

und

$$\text{Subn}=y\partial y_x=\frac{p}{2}.$$

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Daraus folgt $a^2y\partial y_x + b^2x = 0$

also $\partial y_x = -\frac{b^2x}{a^2y}$

demnach ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$$

und die der Normale

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x').$$

Die Gleichung der Ellipse liefert

$$y = f_x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Daher ist $\partial y_x = \partial f_x = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

und nun folgt

$$\text{Subtg} = \frac{a^2 - x^2}{x}$$

$$\text{Subn} = -\frac{b^2}{a^2}x.$$

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Daraus folgt

$$a^2y\partial y_x - b^2x = 0$$

$$\partial y_x = \frac{b^2x}{a^2y}$$

also hat man für die Tangente und die Normale die Gleichungen

$$y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$$

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x').$$

Weiter folgt

$$y = f_x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\partial y_x = \partial f_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\text{Subtg} = \frac{a^2 - x^2}{x}$$

$$\text{Subn} = \frac{b^2}{a^2} x.$$

Es möge endlich die Gleichung der Asymptoten entwickelt werden.

Die Gleichung der Tangente geht über, wenn man den Nenner beseitigt, in

$$a^2 y' y - b^2 x' x = -a^2 b^2$$

oder in 1) $\frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} = 1.$

Die Gleichung der Hyperbel ist

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Aus 2) folgt

$$\frac{y'}{b} = \pm\sqrt{\frac{x'^2}{a^2} - 1}.$$

Diesen Werth substituire man in 1) und es entsteht

$$\frac{x'x}{a^2} \mp \frac{y}{b}\sqrt{\frac{x'^2}{a^2} - 1} = 1$$

oder $\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}} = \frac{a}{x'}$

und setzt man jetzt x' unendlich, so ensteht

$$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = 0$$

oder $y = \pm\frac{b}{a}x$

als Gleichung der Asymptoten.

Quadratur, Rectification.

§. 224.

Unter dem Inhalt einer Curve, Fig. 69, versteht man im Allgemeinen den Inhalt einer Fläche, welche von zweien Ordinaten BQ, DV, von dem zwischen ihnen liegenden Bogen QV und von dem zwischen ihnen befindlichen Stücke BD der ersten Achse begränzt ist.

Eine Curve quadriren heißt ihren Inhalt angeben.

§. 225. Aufgabe.

Es ist Fig. 69 eine Curve durch ihre Gleichung $y = f_x$ gegeben, und man soll das Differential ihres Inhalts bestimmen.

Auflösung. Einer bestimmten Abscisse a entspreche die Ordinate BQ, einer veränderlichen Abscisse x die Ordinate DV $= y$. Der Inhalt BQVD ist dann eine Function F_x von x, welche abhängig ist von der Function f_x der Curve. Das Differential der Funktion F_x ist anzugeben. — Man lasse x wachsen um $\Delta x = DG$, Δx werde aber nicht größer gedacht, als daß die Ordinate y während dieses Wachsthums von x beständig zu- oder beständig abnehme. Man denke die Ordinate GS, und VH und SK parallel der ersten Achse. Es ist GS gleich $y + \Delta y$, oder gleich $f_x + \Delta f_x$, die Fläche DGSV gleich ΔF_x; und es ist offenbar

$$\Delta F_x > DV \cdot DG$$

oder $$\Delta F_x > f_x \cdot \Delta x$$

und zugleich $$\Delta F_x < GS \cdot DG$$

d. h. $$\Delta F_x < (f_x + \Delta f_x)\Delta x.$$

Daraus folgt $$\frac{\Delta F_x}{\Delta x} > f_x$$

und zugleich $$\frac{\Delta F_x}{\Delta x} < f_x + \Delta f_x.$$

Es muß daher ein Werth $\Delta' f_x$ bestehen, kleiner als Δf_x, für welchen

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x} = f_x + \Delta' f_x.$$

Man lasse nun Δx abnehmen bis zum Verschwinden. Im Augenblick des Verschwindens von Δx verschwinden auch Δf_x, $\Delta' f_x$ und ΔF_x. Im Augenblick des Verschwindens ist also

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x} = f_x$$

daher auch $$\frac{dF_x}{dx} = f_x$$

oder $$dF_x = f_x\,dx = y\,dx$$

und damit ist das Differential des Inhalts bestimmt.

§. 226. Aufgabe.

Es sei eine Curve durch die Gleichung $y = f_x$ gegeben. Zu einer bestimmten Abscisse a gehöre, Fig. 69, die Ordinate BQ, zu einer größeren bestimmten Abscisse b die Ordinate DV; man soll den Inhalt der Fläche BQVD bestimmen.

Auflösung. Er ist gleich der Summe der Differentiale:

$$f_a\,dx + f_{a+dx}\,dx + f_{a+2dx}\,dx + \ldots + f_b\,dx$$

d. h. gleich dem bestimmten Integral

$$\int_a^b f_x\,dx.$$

§. 227.

Eine Curve rectificiren heißt die Länge eines Bogens derselben bestimmen

§. 228. Aufgabe.

Es ist Fig. 69 eine Curve gegeben durch ihre Gleichung $y = f_x$, man soll das Differential des Bogens bestimmen.

Auflösung. Einer bestimmten Abscisse a entspreche der Punkt Q, einer veränderlichen Abscisse x der Punkt V. Der Bogen QV ist eine Funktion φ_x von x, welche abhängt von f_x. Das Differential von φ_x soll angegeben werden. Man lasse x wachsen um $\Delta x = DG$, so wächst f_x um $\Delta f_x = HS$, und φ_x um $\Delta\varphi_x = VS$. Man denke die Tangente in V und bezeichne den Punkt, in welchem sie die Verlängerung der Ordinate GS schneidet, mit T, und es ist

$$VT^2 = VH^2 + VH^2 \operatorname{tg} TVH^2$$

oder da $\operatorname{tg} TVH = \partial f_x$ ist,

$$VT = \Delta x \sqrt{1 + \partial f_x^{\,2}}$$

oder $$\frac{VT}{\Delta x} = \sqrt{1 + \partial f_x^{\,2}}.$$

In dem Moment des Verschwindens von Δx fällt das Stück

VT der Tangente mit dem Element VS des Bogens zusammen; daher ist für $\Delta x = 0$

$$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta x} = \sqrt{1 + \partial f_x{}^2}$$

also auch
$$\frac{d\varphi_x}{dx} = \sqrt{1 + \partial f_x{}^2}$$

und
$$d\varphi_x = \sqrt{1 + \partial f_x{}^2} . dx$$

und damit ist das Differential des Bogens bestimmt.

Bei der Ansicht des Unendlichkleinen hat man, unter ds das Differential des Bogens s verstanden, geradezu

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

und daraus folgt

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx^2$$

oder
$$ds = \sqrt{1 + \partial f_x{}^2}\, dx$$

wie zuvor.

Es bezeichne α den Winkel, welchen die Tangente an dem Punkt x, y mit der ersten Achse bildet, und es ist nach §. 213

$$tg\alpha = \partial y_x$$

also
$$Cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial y_x{}^2}}$$

oder Zähler und Nenner mit dx multiplicirt

$$Cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

und bezeichnet β den Winkel, welchen die Tangente mit der zweiten Achse bildet, so hat man

$$Cos\beta = \frac{dy}{ds}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich öfter nutzen.

§. 229. Aufgabe.

Es ist eine Curve durch ihre Gleichung $y = f_x$ gegeben. Man soll den Bogen berechnen, dessen Endpunkte durch die Abscissen a und b, $b > a$, gegeben sind.

Auflösung. Er ist gleich der Summe der Differentiale

$$\sqrt{1+\partial f_a{}^2}\,dx+\sqrt{1+\partial f_{a+dx}{}^2}\,dx+\ldots+\sqrt{1+\partial f_b{}^2}\,dx$$

und diese ist gleich dem bestimmten Integral

$$\int_a^b \sqrt{1+\partial f_x{}^2}\,dx$$

§. 230.

Wir wenden diese Entwickelungen zunächst auf die Kegelschnitte an.

I. Die Gleichung der Parabel, Fig. 30, sei $y=\sqrt{px}$. Man soll den Inhalt der Fläche OVA bestimmen.

Er ist

$$\int_o^x \sqrt{px}\,dx = \tfrac{2}{3}x\sqrt{px} - \tfrac{2}{3}xy.$$

Der Abschnitt OAB ist demnach $\frac{4}{3}xy$.

II. Man soll von der Parabel $y=\sqrt{px}$, Fig. 30, den Bogen OA bestimmen.

Es ist $dy_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$, also der Bogen gleich

$$\int_o^x \sqrt{1+\frac{p}{4x}}\,dx = \int_o^x \sqrt{\frac{\frac{1}{4}p+x}{x}}\,dx.$$

Man setze

$$\sqrt{\frac{x+\frac{1}{4}p}{x}} = z$$

so ist

$$x = \frac{\frac{1}{4}p}{z^2-1}$$

$$dx = -\frac{\frac{1}{2}pz}{(z^2-1)^2}\,dz$$

folglich

$$\int\sqrt{\frac{x+\frac{1}{4}p}{x}}\,dx = -\tfrac{1}{2}p\int\frac{z^2}{(z^2-1)^2}\,dz.$$

Nun findet sich, wenn man in Partialbrüche zerlegt,

$$\frac{z^2}{(z^2-1)^2} = \tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}\right]$$

und es ist

$$\int\frac{dz}{(z+1)^2} = -\frac{1}{z+1}$$

$$\int\frac{dz}{(z-1)^2} = -\frac{1}{z-1}$$

$$\int \frac{dz}{z+1} = \ln(z+1) \qquad \int \frac{dz}{z-1} = \ln(z-1)$$

folglich hat man

$$-\tfrac{1}{2}p\int \frac{z^2}{(z^2-1)^2}dz = \tfrac{1}{8}p\left[\frac{2z}{z^2-1} + \ln\frac{z+1}{z-1}\right].$$

Daher

$$\int \sqrt{\frac{x+\frac{1}{4}p}{x}}\,dx = \sqrt{x(x+\tfrac{1}{4}p)} + \tfrac{1}{8}p\ln\frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}p}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{4}p}-\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x(x+\tfrac{1}{4}p)} + \tfrac{1}{8}p\ln\frac{(\sqrt{x+\frac{1}{4}p}+\sqrt{x})^2}{\frac{1}{4}\sqrt{p}}$$

$$= \sqrt{x(x+\tfrac{1}{4}p)} + \tfrac{1}{4}p\ln\frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}p}+\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{p}}$$

Mit $x = o$ verschwindet der Ausdruck, daher ist der Bogen OA gleich

$$\sqrt{x(x+\tfrac{1}{4}p)} + \tfrac{1}{4}p\ln\frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}p}+\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{p}}.$$

III. Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse sei

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

oder

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

man soll den Inhalt MCPV, Fig. 40, bestimmen.

Der Inhalt sei u, und es ist

$$u = \frac{b}{a}\int_o^x \sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx$$

Man setze

$$\sqrt{a^2-x^2} = zx$$

so ist

$$x^2 = \frac{a^2}{1+z^2}$$

und

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \int zxdx$$

$$= \tfrac{1}{2}zx^2 - \tfrac{1}{2}\int x^2dz$$

$$= \tfrac{1}{2}zx^2 - \frac{a^2}{2}\int\frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}zx^2 - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,z$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

folglich

$$\int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{arc\,Cotg}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{arc\,Sin}\frac{x}{a}$$

demnach ist der verlangte Inhalt

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2}\,\mathrm{arc\,Sin}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\,\mathrm{arc\,Sin}\frac{x}{a}$$

$\frac{xy}{2}$ ist der Inhalt des Dreiecks MVP, folglich ist $\frac{ab}{2}\mathrm{arcSin}\frac{x}{a}$ der Inhalt des Ausschnitts CMP.

Der Inhalt des vierten Theils MCB der Ellipse wird erhalten, wenn man a statt x setzt und es entsteht $\frac{ab\pi}{4}$. Der Inhalt der vollständigen Ellipse ist also πab.

IV. Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse sei

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

oder
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

man soll, Fig. 40, den Bogen CP = s bestimmen, welcher zwischen dem Scheitelpunkt C und dem Punkt P sich befindet, dessen Abscisse x ist.

Es ist
$$\partial y_x = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

demnach

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}}$$

$$= \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}.$$

Wir setzen

$$a^2 - b^2 = a^2 c^2$$

und es entsteht

$$s = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - c^2 x^2}{a^2 - x^2}}.$$

In endlicher Form ist dies Integral, welches zu den elliptischen Funktionen gehört, nicht angebbar. In der Gestalt einer unendlichen Reihe läßt es sich erzielen, z. B. wie folgt:

Es ist $\frac{x}{a}$ ein echter Bruch. Daher darf man setzen

$$\frac{x}{a} = \text{Cos}\,\varphi.$$

Daraus ist

$$x = a\,\text{Cos}\,\varphi$$

und

$$dx = -a\,\text{Sin}\,\varphi\, d\varphi$$

und wenn man diese Werthe oben substituirt, entsteht

$$s = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - c^2\,\text{Cos}\,\varphi^2}$$

oder, wenn man $(1 - c^2 \text{Cos}\,\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satz entwickelt

$$s = a\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \left(\frac{c^2}{2}\text{Cos}\,\varphi^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^4}{4}\text{Cos}\,\varphi^4\right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{c^6}{6}\text{Cos}\,\varphi^6 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{c^8}{8}\text{Cos}\,\varphi^8 + \ldots\right)$$

Auf die einzelnen Glieder des Integrals wende man die bekannte Reductionsformel

$$\int \text{Cos}\,x^n\,dx = \frac{\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \text{Cos}\,x^{n-2}dx$$

an. Man erhält dadurch

$$\int d\varphi \operatorname{Cos}\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\int d\varphi \operatorname{Cos}\varphi^4 = \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^3 + \frac{1.3}{2.4}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varphi$$

$$\int d\varphi \operatorname{Cos}\varphi^6 = \tfrac{1}{6}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi$$

$$\int d\varphi \operatorname{Cos}\varphi^8 = \tfrac{1}{8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^7 + \frac{1.7}{6.8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^5 + \frac{1.5.7}{4.6.8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varphi$$

u. s. w., oder

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \operatorname{Cos}\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \operatorname{Cos}\varphi^4 = \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^3 + \frac{1.3}{2.4}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi - \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \operatorname{Cos}\varphi^6 = \tfrac{1}{6}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \operatorname{Cos}\varphi^8 = \tfrac{1}{8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^7 + \frac{1.7}{6.8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^5 + \frac{1.5.7}{4.6.8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

u. s. w. Und hierdurch sind die einzelnen Glieder von s bestimmt.

Setzt man x = a, oder φ = 1, so wird s zu dem vierten Theil des Umfanges der Ellipse, und es entsteht dafür

$$\frac{\pi a}{2}\left[1 - (\tfrac{1}{2}c)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}c^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}c^3\right)^2 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^4\right)^2 - \ldots\ldots\right]$$

V. Die Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel sei

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

oder

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

und man soll den Inhalt u der Fläche OBQ Fig. 50 bestimmen.

Man hat

$$u = \frac{b}{a}\int_a^x dx\sqrt{x^2 - a^2}$$

Es werde

$$\sqrt{x^2 - a^2} = zx$$

gesetzt, und es ist

$$x^2 = \frac{a^2}{1 - z^2}$$

und

$$\begin{aligned}
\int dx\sqrt{x^2 - a^2} &= \int zxdx \\
&= \tfrac{1}{2}zx^2 - \tfrac{1}{2}\int x^2 dz \\
&= \tfrac{1}{2}zx^2 - \frac{a^2}{2}\int\frac{dz}{1 - z^2} \\
&= \tfrac{1}{2}zx^2 - \frac{a^2}{4}\int dz\left(\frac{1}{1 + z} + \frac{1}{1 - z}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}zx^2 - \frac{a^2}{4}\ln\frac{1 + z}{1 - z} \\
&= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{4}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} \\
&= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}
\end{aligned}$$

also

$$\int_a^x dx\sqrt{x^2 - a^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{4}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

und endlich

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Es ist $\frac{xy}{2}$ der Inhalt des Dreieck MBQ, folglich ist der Inhalt des Ausschnitts MOQ gleich $\frac{ab}{2} \ln\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{b}\right)$.

VI. Die Gleichung der Hyperbel sei

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

und man soll den Bogen s der Hyperbel, vom Scheitel ab, bestimmen.

Man hat $\partial y_x = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

folglich

$$s = \int_a^x dx \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 - a^2}}$$

$$= \int_a^x dx \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)x^2 - a^4}{a^2(x^2 - a^2)}}$$

oder indem man $a^2 + b^2 = a^2c^2$ setzt

$$s = \int_a^x dx \sqrt{\frac{c^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}.$$

Es ist stets $x > a$. Daher kann man setzen

$$\frac{a}{x} = \operatorname{Cos}\varphi$$

daraus ist

$$x = \frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

$$dx = \frac{a \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^2} d\varphi$$

und wenn man oben diese Werthe einführt, entsteht

$$s = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^2}\sqrt{c^2 - \operatorname{Cos}\varphi^2}$$

$$= a\int_0^\varphi d\varphi \frac{c}{\operatorname{Cos}\varphi^2}\sqrt{1 - \frac{\operatorname{Cos}\varphi^2}{c^2}}$$

$$= a\int_0^{\varphi} d\varphi \frac{c}{\text{Cos}\,\varphi^2}\Big(1 - \frac{1}{2c^2}\text{Cos}\,\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4c^4}\text{Cos}\,\varphi^4$$

$$- \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6c^6}\text{Cos}\,\varphi^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8c^8}\text{Cos}\,\varphi^8 - \ldots\ldots\Big)$$

oder

$$s = a\,\text{ctg}\,\varphi - \frac{a}{2c}\varphi - a\int_0^{\varphi} d\varphi\Big(\tfrac{1}{2}\frac{1}{4c^3}\text{Cos}\,\varphi^2$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6c^5}\text{Cos}\,\varphi^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8c^7}\text{Cos}\,\varphi^6 + \ldots\Big)$$

während die einzelnen Glieder des Integrals sich wie bei der Ellipse bestimmen.

Osculation.

§. 231.

Es seien, Fig. 70

$$1)\quad y = f_x$$

$$\text{und } 2)\quad y = \varphi_x$$

irgend zwei Linien. Sie sollen den Punkt, welcher der Abscisse x' entspricht, gemeinschaftlich haben. Dann ist

$$f_{x'} = \varphi_{x'}$$

Der Abscisse $x'+h$ entspreche die Ordinate $SB = f_{x'+h}$ und die Ordinate $SD = \varphi_{x'+h}$, der Abscisse $x'-h$ entspreche die Ordinate $NA = f_{x'-h}$ und $NC = \varphi_{x'-h}$. Die positiven oder negativen Differenzen BD und AC drücken sich dann beziehlich aus durch

$$f_{x'+h} - \varphi_{x'+h} \text{ und } f_{x'-h} - \varphi_{x'-h}$$

oder, wenn man den Taylorschen Satz anwendet und beachtet, daß $f_{x'} = \varphi_{x'}$, durch

$$+(\partial f_{x'} - \partial\varphi_{x'})h + (\partial^2 f_{x'} - \partial^2\varphi_{x'})\frac{h^2}{2!} + (\partial^3{}_{x'} - \partial^3\varphi_{x'})\frac{h^3}{3!} + ..$$

und

$$-(\partial f_{x'} - \partial\varphi_{x'})h + (\partial^2 f_{x'} - \partial^2\varphi_{x'})\frac{h^2}{2!} - (\partial^3 f_{x'} - \partial^3\varphi_{x'})\frac{h^3}{3!} + .$$

Es sei h gleich dx. Die Punkte A, B, C, D sind dann die dem Punkte Q zunächstliegenden Punkte der Curven; und

der Werth einer jeden der eben entwickelten Reihen hat mit dem ersten Gliede derselben einerlei Vorzeichen.

Ist die Differenz $\partial f_{x'} - \partial \varphi_{x'}$ nicht gleich Null, sondern gleich irgend einem positiven oder negativen Werth, so haben die Werthe der Reihen, d. h. die Differenzen AC und BD entgegengesetzte Vorzeichen; und dies bedingt, daß die dem Punkt Q zunächst liegenden Punkte der einen Curve (z. B. die Punkte A und B der Curve $y = f_x$) sich auf verschiedenen Seiten der anderen Curve befinden. In diesem Fall schneiden sich also die Linien in dem Punkte Q. — Ist dagegen die Differenz $\partial f_{x'} - \partial \varphi_{x'}$ gleich Null, während die Differenz $\partial^2 f_{x'} - \partial^2 \varphi_{x'}$ nicht Null ist, so haben die Differenzen AC und BD einerlei Vorzeichen; die dem Punkte Q zunächst liegenden Punkte der einen Curve befinden sich auf einer Seite der anderen Curve, und die Linien berühren sich in dem Punkte Q.

Ist $\partial f_{x'} - \partial \varphi_{x'} = 0$, $\partial^2 f_{x'} - \partial^2 \varphi_{x'} = 0$, aber $\partial^3 f_{x'} - \partial^3 \varphi_{x'} \gtrless 0$, so treten die Linien sich schneidend aus einander; ist $\partial f_{x'} - \partial \varphi_{x'} = 0$, $\partial^2 f_{x'} - \partial^2 \varphi_{x'} = 0$, $\partial^3 f_{x'} - \partial^3 \varphi_{x'} = 0$, aber $\partial^4 f_{x'} - \partial^4 \varphi_{x'} \gtrless 0$, so treten die Linien aus einander, indem sie sich berühren. U. s. w., u. s. w.

Der Begriff der Berührung zweier Curven wird in einem allgemeineren Sinn festgestellt, indem man sagt: zwei Curven berühren sich, wenn sie einen Punkt gemein und an ihm eine gemeinschaftliche Tangente haben.

In allen den zuletzt erwähnten Fällen findet zwischen den Curven in dem Punkte Q Berührung Statt, weil wegen der Gleichung $\partial f_{x'} - \partial \varphi_{x'} = 0$ ihre Tangenten an diesem Punkte zusammenfallen. Diese Berührung ist aber nicht von einerlei Art, und sie ist um so inniger je mehr von den ersten Gliedern der oberen Reihen verschwinden, wie die nachfolgende Erörterung darlegt.

Es sei

$$\partial \varphi_{x'} = \partial f_{x'}$$

$$\partial^2 \varphi_{x'} = \partial^2 f_{x'}.$$

Man denke eine dritte Curve

$$3) \quad y = \psi_x$$

welche gleichfalls den Punkt Q mit der ersten gemein habe, so daß also $\psi_{x'} = f_{x'}$, und es sei

$$\partial \psi_{x'} = \partial f_{x'}.$$

Die dritte Curve kann nicht zwischen den beiden ersten, BD schneidend, hindurch gehen, wenn $\partial^2\psi_{x'} \gtrless \partial^2 f_{x'}$ ist.

Die Differenz der Ordinaten der Curven 1) und 2), welche der Abscisse $x'+h$ entsprechen, drückt sich nämlich aus durch

$$\left(\partial^3 f_{x'+\mu h} - \partial^3 \varphi_{x'+\mu h}\right)\frac{h^3}{3!}$$

und die der Ordinaten der Curven 1) und 3) durch

$$\left(\partial^2 f_{x'} - \partial^2 \psi_{x'}\right)\frac{h^2}{2} + \left(\partial^3 f_{x'+\mu h} - \partial^3 \psi_{x'+\mu h}\right)\frac{h^3}{3!}$$

und während h abnimmt bis zum Verschwinden wird diese Differenz größer als die vorstehende. Die dritte Curve geht also nicht, den Theil BD schneidend, zwischen den beiden ersten hindurch und demnach ist die Berührung der Curven 1) und 2) in dem Punkte Q inniger als die zwischen den Curven 1) und 3).

Ist

$$\partial\varphi_{x'} = \partial f_{x'}$$
$$\partial^2\varphi_{x'} = \partial^2 f_{x'}$$
$$\partial^3\varphi_{x'} = \partial^3 f_{x'}$$

und andererseits

$$\partial\psi_{x'} = \partial f_{x'}$$
$$\partial^2\psi_{x'} = \partial^2 f_{x'}$$

aber

$$\partial^3\psi_{x'} \gtrless \partial^3 f_{x'}$$

so folgt eben so wie zuvor, daß die Curve 3) nicht zwischen denen 1) und 2) hindurch geht, also die Berührung zwischen den Curven 1) und 2) in dem Punkte Q inniger ist, als die zwischen den Curven 1) und 3). U. s. w.

§. 232.

Sind $y = f_x$ und $y = \varphi^x$ irgend zwei Linien, und ist für einen besonderen Werth x' von x

$$f_{x'} = \varphi_{x'}$$
$$\partial f_{x'} = \partial\varphi_{x'}$$
$$\partial^2 f_{x'} = \partial^2\varphi_{x'}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\partial^n f_{x'} = \partial^n\varphi_{x'}$$

so sagt man, es finde zwischen diesen Linien eine Osculation der nten Ordnung Statt in dem Punkte Q, welchen die Linien gemein haben, und welcher der Abscisse x′ entspricht.

§. 233.

Es sei $y = f_x$ eine gegebene Curve; der Abscisse x′ derselben entspreche der Punkt Q. Es sei $y = \varphi_x$ eine Gleichung, welche n Parameter enthält. Die Parameter dieser Gleichung können im Allgemeinen so bestimmt werden, daß zwischen den Linien $y = f_x$ und $y = \varphi_x$ in dem der beliebigen Abscisse x′ angehörigen Punkte Q eine Osculation (n—1)ster Ordnung Statt findet.

Denn man setze

$$f_{x'} = \varphi_{x'}$$
$$\partial f_{x'} = \partial \varphi_{x'}$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\partial^{n-1} f_{x'} = \partial \varphi^{n-1}{}_{x'}$$

und entwickele aus diesen n algebraischen Gleichungen die n Parameter von φ_x, so sind diese Parameter dergestalt bestimmt, daß zwischen den Linien $y = f_x$ und $y = \varphi_x$ eine Osculation (n — 1) ster Ordnung eintritt, in dem der Abscisse x′ zugehörigen Punkte Q.

Setzt man die Ableitungen nur bis zu den (n—2)ten einander gleich, so kann man einen der Parameter beliebig wählen und dann die n — 1 übrigen aus den Gleichungen entwickeln. Und da man für den beliebig zu wählenden unendlich viele verschiedene Werthe setzen darf, so wird man unendlich viele zusammengehörigen Werthe der n Parameter erhalten können, und vermittelst ihrer wird die Gleichung $y = \varphi_x$ unendlich viele Curven liefern, so daß zwischen ihnen und der Linie $y = f_x$ in dem Punkte Q eine Osculation der (n—2)ten Ordnung Statt findet. U. m. dgl.

Ist die Curve $y = \varphi_x$ ein Kreis, so kann höchstens eine Osculation der zweiten Ordnung eintreten, weil die Gleichung des Kreises nur drei Parameter enthält.

§. 234.

Ist $y = f_x$ eine beliebige Curve, Q ein Punkt derselben, und ist ein Kreis so bestimmt, daß zwischen jener Curve und dem Kreise eine Osculation zweiter Ordnung in dem Punkte Q

Statt findet, so heißt der Kreis der **Krümmungskreis**, sein Halbmesser der **Krümmungshalbmesser**, sein Mittelpunkt der **Krümmungsmittelpunkt** des Punktes oder Elementes Q jener Curve.

Ein Kreis hat in allen Punkten einerlei Biegung. Diese ist stärker bei Kreisen von kleinerem Radius, schwächer, wenn der Radius größer ist. Alle Biegungen gehen hervor, indem man den Radius eines Kreises von 0 bis ∞ wachsen läßt. Der Krümmungskreis stimmt in seiner Krümmung mit der des Punktes der Curve überein, zu welchem er gehört.

§. 235. Aufgabe.

Es ist eine Curve $y = f_x$ gegeben; man soll für jeden Punkt derselben den Krümmungskreis bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung des Kreises ist

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2.$$

Man denke aus dieser Gleichung $y = \varphi_x$ entwickelt. Setzt man alsdann

$$\varphi_x = f_x$$
$$\partial\varphi_x = \partial f_x$$
$$\partial^2\varphi_x = \partial^2 f_x$$

und entwickelt aus diesen Gleichungen die Parameter a, b, r, so ist die Aufgabe gelöst. Das angedeutete Verfahren führe man aber folgendermaßen durch: Aus

$$1)\quad (y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$$

ergiebt sich, wenn man y als Funktion von x denkt und nach x differentiirt

$$2)\quad (y - b)\partial y_x + x - a = 0$$
$$3)\quad (y - b)\partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0.$$

Statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ denke man, wegen der oberen Gleichungen, f_x, ∂f_x und $\partial^2 f_x$ substituirt, und entwickele darauf a, b, r. Es folgt aus 3)

$$f_x - b = -\frac{1 + \partial f_x^2}{\partial^2 f_x}$$

dann aus 2)

$$x - a = \frac{1 + \partial f_x^2}{\partial^2 f_x}\partial f_x$$

und wenn man diese Gleichungen quadrirt und addirt, nach 1)

$$r^2 = (1 + \partial f_x^2)\frac{(1 + \partial f_x^2)^2}{\partial^2 f_x^2}.$$

Also ergiebt sich

$$\text{I)}\quad a = x - \frac{1 + \partial f_x{}^2}{\partial^2 f_x} \partial f_x{}^2$$

$$\text{II)}\quad b = f_x + \frac{1 + \partial f_x{}^2}{\partial^2 f_x}$$

$$\text{III)}\quad r = \frac{[1 + \partial f_x{}^2]^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 f_x}.$$

Hier ist x als urveränderlich betrachtet worden. Es können indeß auch x und y als Funktionen eines Urveränderlichen vorliegen. Dann hat man

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2$$

$$(y-b)\,dy + (x-a)\,dx = 0$$

$$(y-b)\,d^2y + (x-a)\,d^2x + dy^2 + dx^2 = 0.$$

Das Differential des Bogens der Curve bezeichne ds, und es ist $dy^2 + dx^2 = ds^2$. Wenn man diesen Werth einführt, ergiebt sich aus den beiden letzten Gleichungen

$$x - a = \frac{dy\,ds^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

$$y - b = -\frac{dx\,ds^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

und dann aus der ersten

$$r = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Setzt man wiederum x als urvariabel fest, so ist $d^2x = 0$ und die Ausdrücke stimmen mit den zuerst erhaltenen überein, welches leicht erhellet, wenn man die Ableitungen durch Differentialquotienten ausdrückt. So ist z. B.

$$r = \frac{(1 + \partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = \frac{\left(\frac{ds^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{ds^3}{dx\,d^2y}$$

und das ist der letztere Ausdruck für $d^2x = 0$.

§. 236.

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt in der Normale des Punktes, dem der Krümmungskreis zugehört.

Die Gleichung der Normale für einen Punkt x, y ist nach §. 217

$$(y - y_1)\partial y_x + x - x_1 = 0$$

unter y_1 und x_1 die Veränderlichen verstanden. Und da wegen der Gleichung 2) des vorigen Paragraphen die Coordinaten a und b des Krümmungsmittelpunktes dieser Gleichung entsprechen, so erhellet der Satz.

§. 237.

Es sei, Fig. 70a, r der Krümmungsradius des Punktes zur Abscisse x. Die Tangente dieses Punktes bilde mit der ersten Achse den Winkel τ. Man lasse x wachsen um dx, so gelangt man zum folgenden Punkt der Curve, dessen Tangente mit der ersten Achse den Winkel $\tau + d\tau$ bildet, der Bogen s wächst um ds, und der Krümmungsradius des neuen Punktes ist $r + dr$. Der Winkel, welchen die beiden Tangenten bilden, ist $d\tau$. Auf den Tangenten stehen die Radien rechtwinklig, daher ist der Winkel, welchen sie bilden, gleichfalls $d\tau$. Man hat nun

$$ds = r d\tau$$

folglich

$$r = \frac{ds}{d\tau}$$

Der Winkel $d\tau$, welchen die Krümmungsradien zweier auf einander folgenden Punkte bilden, oder die Tangenten an ihnen, wird der Contingenz-Winkel genannt.

Aus dem für r erhaltenen Ausdruck ergiebt sich der in §. 235. Denn es ist

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{dx\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{d(\operatorname{arc\,tg} \partial y_x)}$$

$$= \frac{dx\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{\dfrac{\partial^2 y_x dx}{1 + \partial y_x^2}}$$

$$= \frac{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y}$$

§. 238.

Die Bestimmung der Krümmungskreise an den Kegelschnitten mag als Beispiel hier Platz nehmen.

Die Gleichung der Parabel ist

$$y = \sqrt{px}.$$

Daraus folgt $\partial y_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$

$$\partial^2 y_x = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{x^3}}$$

und die Formeln I), II), III) in §. 235 liefern

$$a = 3x + \frac{1}{2}p$$

$$b = -4x\sqrt{\frac{x}{p}} = -\frac{4x^2}{y}$$

$$r = \sqrt{\frac{(4x+p)^3}{4p}}.$$

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist

$$\alpha) \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Daraus ergiebt sich

$$a^2y\partial y_x + b^2x = 0$$

$$a^2y\partial^2 y_x + a^2\partial y_x{}^2 + b^2 = 0$$

also $\partial y_x = -\frac{b^2x}{a^2y}$

$$\partial^2 y_x = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Bezeichnen wir jetzt durch x^I und y^I die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, so folgt

$$x^I = x - \frac{1+\partial y_x{}^2}{\partial^2 y_x}.$$

$$= \frac{a^4b^2 - a^4y^2 - b^4x^2}{a^4b^2}x$$

oder, wenn man für a^4y^2 den Werth aus α setzt,

$$x^I = \frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4}.$$

Aehnlich ergiebt sich

$$y^I = \frac{(b^2-a^2)y^3}{b^4}$$

und $r = \frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$

Eben so findet sich für die Hyperbel

$$x^{I} = \frac{(a^2 + b^2)x^3}{a^4}$$

$$y^{I} = -\frac{(a^2 + b^2)y^3}{b^4}$$

$$r = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Evolvente und Evolute.

§. 239.

Es sei $y = f_x$ irgend einer Curve, Fig. 71. Die Krümmungskreise sämmtlicher Punkte dieser Curve sind gegeben durch die Gleichungen

$$1)\quad (y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$$

$$2)\quad (y - b)\partial y_x + x - a = 0$$

$$3)\quad (y - b)\,\partial^2 y_x + \partial {y_x}^2 + 1 = 0$$

und die Abscissen a und Ordinaten b der Mittelpunkte, und die Radien r aller der Krümmungskreise gehen hervor, wenn man in den Gleichungen 1), 2), 3) für x und y alle zusammengehörigen Werthe gesetzt denkt, welche der Gleichung $y = f_x$ entsprechen, und jedesmal die Parameter a, b und r entwickelt. Dabei ergeben sich die Parameter als Funktionen von x [§. 235, I), II), III)]. — Aendert x sich stetig, so ändern auch die Funktionen a und b von x sich stetig. Daher bilden die durch die Coordinaten a und b bestimmten, auf einander folgenden Krümmungsmittelpunkte eine Curve: diese heißt die Mittelpunktscurve der Linie $y = f_x$. Eine Linie $y = f_x$ und die dazu gehörige Mittelpunktscurve stehen in merkwürdigen Beziehungen zu einander, deren einige wir herleiten wollen.

Die Gleichung der Mittelpunktscurve wird erhalten, wenn man aus den Gleichungen 2) und 3) x eliminirt, und in der entstehenden Gleichung a und b als die Veränderlichen ansieht. Die Elimination ist nur ausführbar, wenn f_x als bestimmte Funktion vorliegt. Im Allgemeinen betrachtet man a und b als Funktionen von x, gegeben durch die Gleichungen 2) und 3); und um zusammengehörige Coordinaten a und

b der Mittelpunktscurve zu erhalten, denkt man für x Werthe gesetzt, und a und b aus 2) und 3) berechnet.

Die Gleichung der Tangente für irgend einen Punkt N der Mittelpunktscurve, dessen Coordinaten a und b sind, ist

$$y_{,} - b = \partial b_a (x_{,} - a)$$

unter $y_{,}$ und $x_{,}$ die veränderlichen Coordinaten der Tangente verstanden. Die Coordinaten des Berührungspunktes betrachten wir nach dem Obigen als Funktionen von x. Der Coefficient ∂b_a läßt sich in x ausdrücken; zu dem Ende werde die Gleichung 2) nach allem x differentiirt; es entsteht

$$(y - b)\partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 - \partial b_x \partial y_x + 1 - \partial a_x = 0$$

oder, wenn man 3) beachtet,

$$\partial b_x \partial y_x + \partial a_x = 0$$

oder 4) $$\frac{\partial b_x}{\partial a_x} = -\frac{1}{\partial y_x}$$

d. h. $$\partial b_a = -\frac{1}{\partial y_x}.$$

Diesen Werth substituiren wir und erhalten als Gleichung der Tangente

$$5)\quad y_{,} - b = -\frac{1}{\partial y_x}(x_{,} - a).$$

Die Funktionen ∂y_x, a und b sind Funktionen desselben x.

Für den Punkt P der Curve $y = f_x$, welcher der nämlichen Abscisse x entspricht, werde andererseits die Normale gedacht. Die Gleichung dieser Normale ist

$$6)\quad y_{,,} - y = -\frac{1}{\partial y_x}(x_{,,} - x)$$

unter $y_{,,}$ und $x_{,,}$ die veränderlichen Coordinaten der Normale verstanden. x und y sind die Coordinaten des Punktes der Curve $y = f_x$, dem die Normale zugehört. — Die Normale enthält nach §. 236 den Krümmungsmittelpunkt des Punktes (x,y), dem sie angehört. Dieser Krümmungsmittelpunkt hat zu Coordinaten a und b, als Funktionen immer noch desselben x; d. h. er ist der Berührungspunkt der Tangente 5). Die Linien 5) und 6) haben also einen Punkt (a,b) gemeinschaftlich, und da sie außerdem wegen der Gleichheit der Coefficienten $-\frac{1}{\partial y_x}$ einerlei Winkel mit der ersten Achse bilden, so fallen sie in einander. Man hat hiernach folgenden Satz:

Die Normale eines beliebigen Punktes (x,y) einer Curve $y = f_x$ ist zugleich Tangente der Mittelpunktscurve jener, und der Berührungspunkt ist der Krümmungsmittelpunkt jenes Punktes (x,y).

Man differentiire die Gleichung 1) nach x. Es entsteht

$$(y-b)(\partial y_x - \partial b_x) + (x-a)(1-\partial a_x) = r\partial r_x$$

oder, wenn man die Gleichung 2) hiervon subtrahirt

$$7)\ (y-b)\partial b_x + (x-a)\partial a_x = -r\partial r_x.$$

In der Gleichung 2) ersetze man, nach 4), ∂y_x durch $-\frac{\partial a_x}{\partial b_x}$ und es entsteht

$$8)\ (y-b)\,\partial a_x - (x-a)\,\partial b_x = 0.$$

Aus den Gleichungen 7), 8) und 1) lassen sich $y-b$ und $x-a$ eliminiren. Man erhält aus 7) und 8)

$$9)\ (x-a)(\partial a_x^2 + \partial b_x^2) = -r\partial r_x \partial a_x$$

und aus 1) und 8)

$$10)\ (x-a)^2(\partial a_x^2 + \partial b_x^2) = r^2\partial a_x^2,$$

und wenn man 9) quadrirt und durch 10) dividirt, ergiebt sich

$$\partial a_x^2 + \partial b_x^2 = \partial r_x^2$$

oder mit ∂x_a^2 multiplicirt

$$\partial r_a^2 = 1 + \partial b_a^2$$

folglich
$$dr = \sqrt{1+\partial b_a^2}\,.\,da$$

und
$$r'-r = \int_a^{a'} \sqrt{1+\partial b_a^2}\,da$$

d. h. der Bogen NN′ der Mittelpunktscurve ist gleich der Differenz der Krümmungsradien r und r′ der Curve $y = f_x$. Schneiden sich beide Curven in Q, so ist der Bogen QN gleich r.

Man denke um die Mittelpunktscurve einen Faden gelegt, und nach dem Bisherigen ist einleuchtend, daß der Punkt P des Fadens r, indem man ihn abwickelt, den Bogen PP′ u. s. w. beschreibt. Die Mittelpunktscurve heißt daher die **Evolute** der Curve $y = f_x$, und diese die **Evolvente** jener.

Das zuletzt erlangte Resultat, läßt sich einfacher in folgender Weise erzielen. Die Gleichung 7) geht mit dx multiplicirt und durch r dividirt über in

$$\frac{a-x}{r}da + \frac{b-y}{r}db = dr$$

Nun sind $\frac{a-x}{r}$ und $\frac{b-y}{r}$ die Cosinus der Winkel, welche die Tangenten mit den Achsen bilden; bezeichnet man also mit ds das Differential des Bogens der Mittelpunktscurve, so ist, nach §. 228

$$\frac{da}{ds}da + \frac{db}{ds}db = dr$$

oder

$$\frac{da^2 + db^2}{ds} = dr$$

d. h.

$$\frac{ds^2}{ds} = dr$$

also

$$ds = dr.$$

Es wächst demnach der Bogen der Mittelpunktscurve eben so wie der Krümmungsradius, und demnach ist $r' - r = NN'$.

Sechstes Kapitel.

Polar-Coordinaten.

§. 240.

Es sei $y = f_x$ irgend eine Gleichung, x durchlaufe alle Werthe von 0 bis $+\infty$ und von 0 bis $-\infty$, und für jeden Werth von x denke man den zugehörigen Werth von y berechnet. Die gerade Linie NP, Fig. 72, sei fest, in ihr der Punkt P beliebig und fest angenommen. Alle Werthe des Urveränderlichen x denke man als Bogenmaaße des veränderlichen Winkels NPQ benutzt, und für jeden Werth von x den veränderlichen Schenkel PQ gleich dem zu x gehörigen Werth von y (also $= f_x$) genommen. Wegen der stetigen Aenderung von x und y beschreibt der Punkt Q dabei irgend eine Linie. Die Gleichung $y = f_x$ heißt die Polargleichung dieser Linie, und die Linie kann die Polarcurve jener Gleichung genannt werden. Der feste Punkt P heißt der Pol, der Winkel x die Abweichung, der veränderliche Schenkel PQ der veränderliche Radius, auch der Radius-Vector; zusammengehörige Werthe von x und y nennt man Polar-Coordinaten des Punktes, welcher durch sie bestimmt ist.

§. 241. Aufgabe.

Es sei, Fig. 73, NP die feste gerade Linie, P der Pol; man soll die Polargleichung einer beliebigen geraden Linie VQ herleiten.

Auflösung. Zunächst muß die Lage der Linie VQ gegen die feste Linie und den Pol bestimmt werden. Man fälle von P aus die Normale PV auf VQ, setze diese Normale gleich a, und den Winkel NPV gleich α. Bezeichnet man die

Abweichung durch x, den Radius-Vector durch y, so hat man sofort

$$y = \frac{a}{\text{Cos}(x-\alpha)}$$

als Polargleichung der geraden Linie.

Steht die Linie VQ auf NP normal, so ist $\alpha = 0$ oder $= \pi$, und die Gleichung geht über in $y = \pm \frac{a}{\text{Cos}\,x}$, ist die Linie VQ parallel mit NP, so ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, oder $= \frac{3}{2}\pi$, und die Gleichung geht über in $y = \pm \frac{a}{\text{Sin}\,x}$, und mehr dergl.

§. 242. Aufgabe.

Es sei, Fig. 74, NP die feste gerade Linie, P der Pol. Man soll die Polargleichung des Kreises herleiten.

Auflösung. Der Kreis sei gegeben durch den Radius r, die Linie PM gleich a, und der Winkel MPN gleich α. Die Abweichung bezeichne x, der Radius-Vector PQ (oder PQ') sei gleich y. Man hat

$$r^2 = a^2 + y^2 - 2ay\,\text{Cos}(x-\alpha)$$

und daraus

$$y = a\,\text{Cos}(x-\alpha) \pm \sqrt{r^2 - a^2\,\text{Sin}(x-\alpha)^2}$$

als die verlangte Gleichung des Kreises.

§. 243.

Wenn die Gleichung einer Linie für rechtwinklige Coordinaten x und y vorliegt, wird der Uebergang auf Polar-Coordinaten, deren Pol der Anfangspunkt jener und deren feste Linie die erste Achse ist, sehr einfach bewirkt, indem man, unter z den Radius-Vector und unter ω die Abweichung verstanden,

$$\text{Cos}\,\omega = \frac{x}{z}$$

$$\text{Sin}\,\omega = \frac{y}{z}$$

setzt, und die hieraus sich ergebenden Werthe

$$x = z\,\text{Cos}\,\omega \text{ und } y = z\,\text{Sin}\,\omega$$

in der gegebenen Gleichung substituirt.

Die Gleichung des Kreises z. B. für rechtwinklige Coordinaten ist

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

man setze $x = z\,\mathrm{Cos}\,\omega$, $y = z\,\mathrm{Sin}\,\omega$, und es entsteht, wenn man noch z entwickelt

$$z = a\,\mathrm{Cos}\,\omega + b\,\mathrm{Sin}\,\omega \pm \sqrt{r^2 - (a\,\mathrm{Sin}\,\omega - b\,\mathrm{Cos}\,\omega)^2}$$

als Polargleichung des Kreises.

§. 244.

Es sei, Fig. 72, die Curve AV gegeben durch ihre Polargleichung $y = f_x$, P sei der Pol, PN die feste Linie, PQ irgend ein Radius-Vector. Durch den Pol P denke man die gerade Linie TZ normal auf dem Radius-Vector PQ, für den Punkt Q werde die Tangente HT und die Normale QZ gedacht: das Stück PT heißt alsdann die Polar-Subtangente, das Stück PZ die Polar-Subnormale des Punktes Q. Wir wollen beide bestimmen.

Man lasse x wachsen um dx und schlage mit PQ den Bogen QS. Der unendlich kleine Bogen QS ist gleich $f_x dx$, er steht normal auf PV, ist also parallel mit TP; der Punkt H liegt in V. Daher hat man

$$TP : QS = PV : SV$$

oder

$$\mathrm{Subtg} : f_x dx = f_x + df_x : df_x$$

oder, weil der Summand df_x gegen den Summand f_x verschwindet, und df_x gleich $\partial f_x dx$ ist,

$$1)\quad \mathrm{Subtg} = \frac{f_x{}^2}{\partial f_x}.$$

Aus der Proportion

$$TP : PQ = PQ : PZ$$

folgt

$$2)\quad \mathrm{Subn} = \partial f_x.$$

Und bezeichnet γ den Winkel TQP, welchen die Tangente mit dem Radius-Vector bildet, so ist, wie leicht erhellet,

$$3)\quad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{f_x}{\partial f_x}.$$

§. 245. Aufgabe.

Es ist, Fig. 72, eine Curve durch ihre Polargleichung $y = f_x$ gegeben. Man soll den Inhalt der Fläche bestimmen, welche durch die Radien PA und PQ und den Bogen AQ begränzt ist.

Auflösung. Der verlangte Inhalt sei F_x. Man lasse x um dx wachsen, und schlage mit PQ den Kreisbogen QS, so ist $SV = dy = df_x$, $QPV = dF_x$, der Bogen QS drückt sich wegen der Proportion

$$1 : dx = y : QS$$

aus durch ydx oder $f_x dx$, der Kreisausschnitt QPS ist gleich $\frac{1}{2}f_x{}^2dx$, die Fläche QSV, als ein unendlich kleines, bei S rechtwinkliges Dreieck, gleich $\frac{1}{2}df_x dx$, und man hat

$$dF_x = \tfrac{1}{2}f_x{}^2dx + \tfrac{1}{2}df_x dx$$

oder, weil das zweite Glied gegen das erste verschwindet,

$$dF_x = \tfrac{1}{2}f_x{}^2dx$$

folglich

$$F = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^x f_x{}^2dx$$

§. 246. Aufgabe.

Es ist, Fig. 72, eine Curve durch ihre Polargleichung $y = f_x$ gegeben, man soll die Länge des Bogens AQ bestimmen.

Auflösung. Der Bogen drücke sich aus durch φ_x; man lasse x um dx wachsen, und verfahre wie im vorigen Paragraph, so ist noch $QV = d\varphi_x$ und man hat

$$\begin{aligned} d\varphi_x &= \sqrt{QS^2 + SV^2} \\ &= \sqrt{f_x{}^2dx^2 + df_x{}^2} \\ &= \sqrt{f_x{}^2 + \partial f_x{}^2}\,dx \end{aligned}$$

und

$$\varphi_x = \int_\alpha^x \sqrt{f_x{}^2 + \partial f_x{}^2}\,dx$$

Siebentes Kapitel.

Von einigen besonderen Curven.

I. Cykloide.

§. 247.

Man stelle sich eine unendliche gerade Linie vor und einen Kreis, der von der geraden Linie in einem Punkte Q berührt wird. Den Kreis rolle man längs der geraden Linie (und während er beständig in einerlei Ebene bleibt) bis der Punkt Q seiner Peripherie wieder in die gerade Linie gelangt. Der Punkt Q der Peripherie des Kreises beschreibt hierbei eine krumme Linie: diese heißt Cykloide oder Radlinie. Der Kreis heißt der erzeugende Kreis, der Punkt Q der erzeugende Punkt, der Theil der geraden Linie, über welchen der erzeugende Kreis gerollt ist, die Grundlinie oder Basis. Die Grundlinie ist der Peripherie des erzeugenden Kreises gleich. Hat der erzeugende Kreis die Hälfte der Basis zurückgelegt, so ist die Entfernung des erzeugenden Punktes von der Basis gleich dem Durchmesser des Kreises, und diese Entfernung ist die größte. Der Punkt der Cykloide, in welchem der erzeugende Punkt sich dann befindet, heißt der Scheitelpunkt der Cykloide, die Normale vom Scheitelpunkt auf die Basis die Achse. Durch den Scheitelpunkt ist die Cykloide in zwei congruente Theile getheilt; dies erhellet daraus, daß nothwendig dieselbe Cykloide hervorgeht, wenn der Kreis rückwärts rollt. Bei einem fortgesetzten Rollen des Kreises erzeugt sich wiederholt dieselbe Cykloide.

§. 248.

Wir leiten zuvörderst die Gleichungen der Cykloide her.

Es sei, Fig. 75, AHX eine Cykloide, AX ihre Basis; der Radius des Erzeugungskreises sei r. Man nehme an, der erzeugende Punkt Q habe sich Anfangs in A befunden, der erzeugende Kreis sei von A bis B gerollt worden, und dadurch der Punkt Q an seinen gegenwärtigen Ort gelangt. Dann ist AB gleich dem Bogen QB. Wir setzen QB gleich z. Der Mittelpunktswinkel QMB heißt der Wälzungswinkel; sein Bogenmaaß ist $\frac{z}{r}$. Man nehme AX als erste Achse, A als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, fälle QV, setze AV = x, VQ = y, und man hat

$$1)\quad x = z - r\mathrm{Sin}\frac{z}{r}$$

$$2)\quad y = r - r\mathrm{Cos}\frac{z}{r} = 2r\mathrm{Sin}\frac{z}{2r}^2.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$(x-z)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

hieraus

$$z - x = \sqrt{2ry - y^2}$$

$$z = x + \sqrt{2ry - y^2}.$$

Dies in 2) gesetzt, liefert

$$\mathrm{Cos}\frac{x + \sqrt{2ry - y^2}}{r} = \frac{r-y}{r}$$

oder

$$\frac{x + \sqrt{2ry - y^2}}{r} = \mathrm{arc\,cos}\frac{r-y}{r}$$

und daraus ergiebt sich

$$3)\quad x = -\sqrt{2ry - y^2} + r\,\mathrm{arc\,cos}\frac{r-y}{r}.$$

Die letzte Gleichung ist auch leicht aus der Figur zu entnehmen. Es ist nämlich $\frac{DM}{r}$ oder $\frac{r-y}{r}$ der Cosinus des Bogens zum Halbmesser 1, welcher Maaß des Winkels QMB ist, folglich $r\,\mathrm{arc\,cos}\frac{r-y}{r} = BQ = BA$, und $-\sqrt{2ry - y^2}$ ist $= -BV$.

Um nach Anleitung des sechsten Kapitels die hauptsächlichsten Bestimmungen bei der Cykloide auszuführen, müßten

wir aus der Gleichung 3) y als Funktion f_x von x entwikkeln, und die Ableitungen ∂y_x und $\partial^2 y_x$ bilden. Die Gleichung 3) ist hierzu nicht wohlgeeignet. Deshalb ziehen wir es vor, aus den Gleichungen 1) und 2) die Ableitungen von x und y nach z zu entnehmen, und aus diesen die Ableitungen von y nach x herzustellen.

Die Bestimmung der Ableitungen mag im Voraus erfolgen.

Aus 1) ergiebt sich

$$4)\quad \partial x_z = 1 - \mathrm{Cos}\frac{z}{r} = 2\,\mathrm{Sin}\frac{z}{2r}^2$$

$$5)\quad \partial^2 x_z = \frac{1}{r}\mathrm{Sin}\frac{z}{r}.$$

Aus 2)

$$6)\quad \partial y_z = \mathrm{Sin}\frac{z}{r}$$

$$7)\quad \partial^2 y_z = \frac{1}{r}\mathrm{Cos}\frac{z}{r}.$$

Man hat nun

$$\partial y_x = \frac{\partial y_z}{\partial x_z} = \frac{\mathrm{Sin}\frac{z}{r}}{2\mathrm{Sin}\frac{z}{2r}^2} = \mathrm{Cotg}\frac{z}{2r}$$

und
$$\partial^2 y_x = \frac{\partial^2 y_z \partial x_z - \partial y_z \partial^2 x_z}{\partial x_z^3}$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{2\mathrm{Sin}\frac{z}{2r}^2\mathrm{Cos}\frac{z}{r} - \mathrm{Sin}\frac{z}{r}^2}{8\mathrm{Sin}\frac{z}{2r}^6}$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{2\mathrm{Sin}\frac{z}{2r}^2\left(2\mathrm{Cos}\frac{z}{2r}^2 - 1\right) - \mathrm{Sin}\frac{z}{r}^2}{8\mathrm{Sin}\frac{z}{2r}^6}$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{-1}{4\mathrm{Sin}\frac{z}{2r}^4}.$$

Also ist

$$8)\quad \partial y_x = \mathrm{Cotg}\,\frac{z}{2r}$$

$$9)\quad \partial^2 y_x = -\frac{1}{4r\,\mathrm{Sin}\,\frac{z}{2r}^4}.$$

§. 249.

In manchen Fällen ist es vortheilhaft, die Gleichung der Cykloide zu besitzen für den Scheitelpunkt H als Anfangspunkt der Coordinaten und den zum Scheitelpunkt gehörigen Durchmesser HG als erste Achse. Diese Gleichung herzustellen sei QS normal auf HG; es sei QS $= y'$, HS $= x'$, Bogen QC $= z'$; das Bogenmaaß des Winkels QMC, der in diesem Falle Wälzungswinkel genannt wird, ist $\frac{z'}{r}$. Und man hat:

$$1)\quad x' = r - r\,\mathrm{Cos}\,\frac{z'}{r} = 2r\,\mathrm{Sin}\,\frac{z'}{2r}$$

$$2)\quad y' = z' + r\,\mathrm{Sin}\,\frac{z'}{r}.$$

Es ist nämlich AG = Bogen BQC, AB = Bogen BQ, also BG = Bogen QC $= z'$. Aus diesen Gleichungen folgt

$$3)\quad y' = \sqrt{2rx' - x'^2} + r\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{r - x'}{r}$$

und hieraus

$$4)\quad \partial y'_{x'} = \frac{2r - x'}{\sqrt{2rx' - x'^2}}.$$

Wir haben zu Anfange die Cykloide als die krumme Linie erklärt, welche der erzeugende Punkt während einer Umwälzung des Erzeugungskreises beschreibt. Eigentlich ist aber die Cykloide als die Linie aufzufassen, welche der erzeugende Punkt beschreibt, während der Kreis über die unendliche gerage Linie rollt. Die Cykloide besteht also aus unendlich vielen Theilen, wie AHX, sie hat unendlich viele Scheitel H, und unendlich viele Spitzen, wie bei A und X. Diese unendliche Cykloide wird auch gegeben sowohl durch die Gleichungen dieses als des vorigen Paragraphen.

§. 250.

Nach den Entwickelungen des sechsten Kapitels hat man jetzt

$$\text{Subtg} = \frac{y}{\partial y_x} = \frac{2r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}^2}{\operatorname{Cotg} \frac{z}{2r}}$$

oder 1) $\text{Subtg} = 2r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}^2 \operatorname{tg} \frac{z}{2r}$

und $\text{Subn} = y \partial y_x = 2r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}^2 \operatorname{Cotg} \frac{z}{2r}$

oder 2) $\text{Subn} = r \operatorname{Sin} \frac{z}{r}$.

Es ist aber, Fig. 75, $r \operatorname{Sin} \frac{z}{r} = r \operatorname{Sin} QMB = QD = VB$. Folglich ist QB die Normale und QC die Tangente des Punktes Q. Und denkt man für den Scheitelpunkt H den Erzeugungskreis, zieht QN parallel der Grundlinie, und die Sehnen NH und NG, so ist die Normale QB parallel mit NG, und die Tangente QC parallel mit NH. Hiernach kann leicht für jeden Punkt Q der Cykloide die Tangente und die Normale construirt werden.

Der Halbmesser des Krümmungskreises ist nach §. 235 gleich

$$\frac{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$$

also gleich

$$-4r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}^4 \sqrt{\left(1 + \operatorname{Cotg} \frac{z}{2r}^2\right)^3}$$

oder 3) $\text{Krümmungshalbmesser} = 4r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}$

da er absolut zu nehmen ist. Es ist aber, Fig. 75, $4r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r} = 2.2r \operatorname{Sin} BCQ = 2BQ$, d. h. es ist der Krümmungshalbmesser das Doppelte der Normale.

Es bezeichne a die Abscisse, b die Ordinate des Mittelpunktes der Krümmung, so ist nach §. 235

$$a = x - \frac{1 + \partial y_x^2}{\partial^2 y_x} \partial y_x$$

oder, wenn man die Werthe substituirt,

$$a = x + 4r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}^4 \left(1 + \operatorname{Cotg} \frac{z}{2r}^2\right) \operatorname{Cotg} \frac{z}{2r}$$

$$= x + 4r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r} \operatorname{Cos} \frac{z}{2r}$$

$$= x + 2r \operatorname{Sin} \frac{z}{r}$$

oder, da nach §. 248 1) $x = z - r\operatorname{Sin} \frac{z}{r}$ ist,

$$4) \quad a = z + r \operatorname{Sin} \frac{z}{r}.$$

Weiter ist

$$b = y + \frac{1 + \partial y_x{}^2}{\partial^2 y_x}$$

$$= 2r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}^2 - 4r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}^4 \left(1 + \operatorname{Cotg} \frac{z}{2r}^2\right)$$

oder $\quad 5) \quad b = -2r \operatorname{Sin} \frac{z}{2r}^2.$

Die Resultate 4) und 5) lassen sich auch sofort der Figur entnehmen.

Man vergleiche die Resultate 4) und 5) mit den Gleichungen 2) und 1) in §. 249, und es erhellet, daß die Mittelpunktscurve AKL eine Cykloide ist, deren Erzeugungskreis den Radius r hat, (die also congruent ist mit der ursprünglichen Cykloide), deren Grundlinie parallel mit AX, aber um 2r tiefer liegt, und deren Scheitel mit den Spitzen der ersteren zusammenfallen. Man erkennt leicht, wie der Bogen AHX von den Bogen AL und LX kann abgewickelt werden.

Man denke die Figur in umgekehrter Lage, nämlich L oben, H unten, dabei AX horizontal. In L sei ein Pendel von der Länge LH aufgehängt, und es wickele sich während seiner Schwingungen stets auf einen der Bogen LA und LX, oder von einem derselben. Der Punkt H des Pendels wird dann in der Cykloide AHX schwingen. Die Mechanik beweist, daß ein in einer Cykloide schwingender Punkt alle Schwingungen in gleichen Zeiten vollführt. Man hat also dann ein isochronisches Pendel.

§. 251.

Die cykloidische Fläche HSQ ist gleich

$$\int_0^{x'} y'dx'$$

und es ist

$$\int y'dx' = y'x' - \int x'dy'$$

$$= x'y' - \int \frac{2rx' - x'^2}{\sqrt{2rx' - x'^2}} dx'$$

$$= x'y' - \int \sqrt{2rx' - x'^2}\, dx'$$

also $$\int_0^{x'} y'dx' = x'y' - \int_0^{x'} \sqrt{2rx' - x'^2}\, dx'$$

Es ist aber $x'y'$ das Rechteck HSQT, und $\int_0^{x'} \sqrt{2rx' - x'^2}\, dx'$ ist der Inhalt des Kreisstückes HSN, folglich ist der Inhalt der cykloidischen Fläche HSQ gleich der Differenz zwischen dem Rechteck HSQT und dem Kreisstück HSN. Für $x' = 2r$ liefert dies den Inhalt der Fläche HGA gleich $\frac{3}{2}\pi r^2$, deshalb ist der Inhalt der von der Cykloide AHX und der Basis AX begränzten Ebene gleich $3\pi r^2$, also dreimal so groß als der Erzeugungskreis.

Der Bogen HQ drückt sich aus durch

$$\int_0^{x'} \sqrt{1 + \partial y'_{x'}{}^2}\, dx'$$

$$= \int_0^{x'} \sqrt{1 + \frac{(2r - x')^2}{2rx' - x'^2}}\, dx'$$

$$= \int_0^{x'} \sqrt{\frac{2r}{x'}}\, dx'$$

und das ist gleich $2\sqrt{2rx'}$. Es ist aber $2\sqrt{2rx'} = 2\sqrt{HG \,.\, HS} = 2HN$, d. h. es ist der Bogen HQ gleich dem Doppelten der Sehne HN, also Bogen HA gleich 4r und die ganze Cykloide AHX = 8r.

§. 252. Aufgabe.

Man soll die Cykloide zeichnen, deren Erzeugungskreis den Radius r hat.

Auflösung. Auf einer geraden Linie, Fig. 76, nehme man ein Stück AX gleich der Peripherie des Erzeugungskreises. Dies Stück wird näherungsweise und mit sehr geringer Abweichung, erhalten, indem man es gleich nimmt sechsmal dem Radius, und dem fünften Theil von der Sehne des Qua-

dranten. In der Mitte G von AX errichte man die Normale GH gleich 2r. H ist dann Scheitelpunkt der zu zeichnenden Cykloide. Ueber GH als Durchmesser beschreibe man einen Kreis. Man theile AG in irgend eine Anzahl gleicher Theile, etwa 8; den Halbkreis GH in eben so viele gleiche Theile. Von einem beliebigen Theilpunkt N des Halbkreises ziehe man NQ parallel GA, und wenn N vom Scheitel H aus der qte Theilpunkt ist, so mache man NQ gleich q Theilen der Linie GA, und es ist Q ein Punkt der Cykloide. In der Figur ist N der 5te Theilpunkt des Halbkreises von H aus, also werde NQ gleich GB gleich 5 Theilen von GA genommen. In dieser Weise kann man vermittelst eines jeden Theilpunktes einen Punkt der Cykloide erhalten, also überhaupt so viele, als man für nöthig erachtet, die Cykloide aus freier Hand durch sie zu zeichnen, mit einer Genauigkeit, die der jedesmal vorliegende Fall bedingt.

Dies Verfahren beruht darauf, daß, Fig. 75, AB = Bogen QB = Bogen NG, also Bogen NH = BG = QN ist.

II. Epicykloide.

§. 253.

Man denke zwei Kreise, welche sich von außen berühren. Der eine dieser Kreise sei fest; in der Peripherie des anderen werde beliebig ein Punkt Q genommen, und man stelle sich vor, dieser zweite Kreis werde um den festen gerollt, während beide Kreise beständig in einerlei Ebene bleiben. Der Punkt Q beschreibt hierbei eine krumme Linie: diese heißt Epicykloide. Der feste Kreis wird der Grundkreis, der andere der Erzeugungskreis, der Punkt Q der erzeugende, oder beschreibende Punkt genannt. Die Epicykloide besteht, gleich der Cykloide, aus unendlich vielen congruenten Bogen, welche Spitzen bilden, wo sie zusammenhängen. Diese Spitzen liegen in der Peripherie des Grundkreises, und der Bogen des Grundkreises, welcher von zweien auf einander folgenden Spitzen begränzt ist, ist gleich der Peripherie des Erzeugungskreises. Jeder von den unendlich vielen Bogen, aus welchen die Epicykloide besteht, enthält einen Punkt, dessen Entfernung von der Peripherie des Grundkreises gleich ist dem Durchmesser des Erzeugungskreises, oder, was dasselbe bedingt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt des Grundkreises gleich ist dem Radius des Grundkreises und dem Durchmesser des Erzeu-

gungskreises; dieser Punkt heißt der Scheitel dieses Bogens der Epicykloide; die gerade Linie durch den Scheitel eines Bogens der Epicykloide und durch den Mittelpunkt des Grundkreises mag die Achse dieses Bogens genannt werden. Häufig versteht man unter einer Epicykloide nur einen der gedachten Bogen.

§. 254.

Es sei, Fig. 77, M der Mittelpunkt, AB ein Theil der Peripherie des Grundkreises, der Radius desselben sei a. Es sei AQH ein Theil einer Epicykloide, beschrieben durch den Punkt Q der Peripherie eines Erzeugungskreises, dessen Radius r ist. H sei der Scheitel, HM also die Achse. Wir wollen die Gleichung der Epicykloide herleiten, während HM als Abscissenachse, M als Anfangspunkt der Coordinaten dient und der Coordinatenwinkel ein rechter ist.

Man stelle sich vor, der Punkt V der Peripherie des Erzeugungskreises habe sich Anfangs in B befunden, also der erzeugende Punkt Q in H, und der Erzeugungskreis sei gerollt worden, bis er seine gegenwärtige Stellung erreicht hat. Dann ist Bogen BN = Bogen VN, und bezeichnet t das Bogenmaaß des veränderlichen Wälzungswinkels VCN, φ das Bogenmaaß des Winkels BMN, so ist

$$1)\quad rt = a\varphi.$$

Man fälle die Normale QS auf die Achse, setze MS = x, QS = y; denke CD normal auf HM, CE normal auf QS; den Winkel NCQ bezeichne γ, der Winkel NCE ist gleich φ. Es ist

$$MD = (a+r)\operatorname{Cos}\varphi$$

$$DS = CE = r\operatorname{Cos}(\gamma-\varphi)$$

also

$$x = MD - DS$$

$$= (a+r)\operatorname{Cos}\varphi - r\operatorname{Cos}(\gamma-\varphi)$$

oder, da sich $\gamma-\varphi$ und $t+\varphi$ zu einem gestreckten Winkel ergänzen,

$$x = (a+r)\operatorname{Cos}\varphi + r\operatorname{Cos}(t+\varphi)$$

Weiter ist

$$ES = CD = (a+r)\operatorname{Sin}\varphi$$

$$QE = r\operatorname{Sin}(\gamma-\varphi).$$

Daher $$y = (a+r)\operatorname{Sin}\varphi + r\operatorname{Sin}(\gamma-\varphi)$$

oder $$y = (a+r)\operatorname{Sin}\varphi + r\operatorname{Sin}(t+\varphi).$$

Nach der Gleichung 1) ist $\varphi = \frac{r}{a} t$. Diesen Werth substituire man, und es ergiebt sich

$$2)\quad x = (a+r) \operatorname{Cos} \frac{r}{a} t + r \operatorname{Cos} \frac{a+r}{a} t$$

$$3)\quad y = (a+r) \operatorname{Sin} \frac{r}{a} t + r \operatorname{Sin} \frac{a+r}{a} t.$$

Der Kürze wegen setzen wir

$$\frac{r}{a} = p, \quad \frac{a+r}{a} = q.$$

Die Gleichungen kommen dadurch auf folgende Gestalt:

$$4)\quad x = aq \operatorname{Cos} pt + r \operatorname{Cos} qt$$

$$5)\quad y = aq \operatorname{Sin} pt + r \operatorname{Sin} qt$$

und mehr als dieser Gleichungen, durch welche x und y als Funktionen von t gegeben sind, bedarf es nicht.

Aus 4) und 5) folgt beziehlich

$$\partial x_t = apq \operatorname{Sin} pt + qr \operatorname{Sin} qt$$

$$\partial y_t = apq \operatorname{Cos} pt + qr \operatorname{Cos} qt$$

Hieraus ergiebt sich, da $ap = r$ ist,

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{\operatorname{Cos} pt + \operatorname{Cos} qt}{\operatorname{Sin} pt + \operatorname{Sin} qt}$$

oder

$$6)\quad \partial y_x = \operatorname{Cotg} \frac{p+q}{2} t = \operatorname{Cotg} \frac{a+2r}{2a} t$$

§. 255.

Nach den Bestimmungen des sechsten Kapitels hat man sogleich

$$\operatorname{Subtg} = y \operatorname{Tg} \frac{a+ar}{2a} t$$

$$\operatorname{Subn} = y \operatorname{Cotg} \frac{a+2r}{2a} t.$$

Man stelle sich die Normale für den Punkt Q der Epicykloide vor, Fig. 77, und nehme an, sie schneide die Abscissenachse in G. Dann ist

$$\operatorname{tg} QGM = -\frac{1}{\partial y_x} = -\operatorname{tg} \frac{a+2r}{2a} t$$

folglich $\operatorname{tg} QGH = \operatorname{tg} \frac{a+2r}{2a} t$

also $\angle QGH = \frac{a+2r}{2a} t.$

Man denke weiter die Sehne QN, und nehme an, sie schneide verlängert die Abscissenachse in K. Dann ist

$$\begin{aligned} \angle QKH &= \varphi + KNM \\ &= \varphi + CNQ \\ &= \varphi + \tfrac{1}{2} t \\ &= \frac{r}{a} t + \tfrac{1}{2} t = \frac{2r+a}{2a} t \end{aligned}$$

Es ist also $\angle QGH = \angle QKH$, und hieraus erhellet, daß die Normale in Q mit der Sehne QN zusammenfällt. Und dann fällt die Tangente in Q in die Sehne QT.

§. 256. Aufgabe.

Die Epicykloide zu zeichnen, wenn der Radius a des Grundkreises und der Radius r des Erzeugungskreises gegeben sind.

Auflösung. Man nehme, Fig. 78, eine gerade Linie MH gleich $a + 2r$, schlage von M aus mit $MB = a$ den Grundkreis, und über $BH = 2r$ den Erzeugungskreis. Den Bogen BA des Grundkreises mache man gleich der halben Peripherie BH des Erzeugungskreises. Dies geschieht, indem man den Winkel BMA gleich $\frac{r}{a} 180°$ aufträgt. Man theile den Bogen BA in eine Anzahl gleicher Theile, etwa 8, den Halbkreis BH in eben so viele gleiche Theile. Durch irgend einen Theilpunkt des Bogens BA, etwa V, lege man die Linie MS', dann durch den entsprechenden Theilpunkt Q des Halbkreises BH, concentrisch zu BA, den Bogen SQ', und nehme S'Q' gleich SQ, so ist Q' ein Punkt der Epicykloide. In derselben Weise verschafft man sich so viele Punkte der Epicykloide, als man für nothwendig erachtet, die Linie mit der erforderlichen Genauigkeit zu zeichnen. Die Richtigkeit des Verfahrens erhellet, wenn man den Erzeugungskreis bis V gerollt sich vorstellt.

III. Hypocykloide.

§. 257.

Man denke zwei Kreise, welche sich von innen berühren; der eine der Kreise sei fest, in der Peripherie des anderen nehme man irgend einen Punkt Q, und wälze diesen Kreis längs der Peripherie des festen Kreises; der Punkt Q beschreibt dabei eine krumme Linie: diese heißt **Hypocykloide**.

§. 258.

Der Radius des Grundkreises sei a, der des Erzeugungskreises r: wir wollen die Gleichungen herleiten, durch welche die Hypocykloide sich bestimmt.

Es sei, Fig. 79, M der Mittelpunkt, BA ein Bogen des Grundkreises. H sei Scheitel der Hypocykloide, beschrieben durch den Erzeugungskreis zum Radius r. Man nehme an, zunächst haben die Punkte V und Q der Peripherie des Erzeugungskreises beziehlich sich in B und H befunden, und der Erzeugungskreis sei gerollt worden, bis er seine gegenwärtige Stellung erreichte. Dann ist Bogen BN gleich Bogen VN. Die Achse MB diene als Abscissenachse, M als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten. Man fälle von Q die Normale QS auf MB, und setze MS = x, QS = y, Man denke weiter CD normal auf MB, und CE normal auf QS. Es ist alsdann

$$MD = MC \,\mathrm{Cos}\,\varphi = (a-r)\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

$$SD = EC = r\,\mathrm{Cos}(t-\varphi)$$

also

$$x = MD - SD$$

$$= (a-r)\,\mathrm{Cos}\,\varphi - r\,\mathrm{Cos}\,(t-\varphi)$$

Ferner ist

$$ES = CD = (a-r)\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

$$QE = r\,\mathrm{Sin}\,(t-\varphi)$$

also

$$y = (a-r)\,\mathrm{Sin}\,\varphi + r\,\mathrm{Sin}\,(t-\varphi).$$

Wegen der Gleichheit der Bogen BN und VN ist

$$a\varphi = rt$$

$$\varphi = \frac{r}{a}t$$

und wenn man diesen Werth oben substituirt, entsteht

$$1)\quad x = (a-r)\,\mathrm{Cos}\,\frac{r}{a}t - r\,\mathrm{Cos}\,\frac{a-r}{a}t$$

$$2)\quad y = (a - r)\,\mathrm{Sin}\,\frac{r}{a}\,t + r\,\mathrm{Sin}\,\frac{a-r}{a}\,t.$$

Der Kürze wegen möge $\frac{r}{a} = p$, $\frac{a-r}{a} = q$ gesetzt werden.

Dadurch gehen die Gleichungen über in

$$3)\quad x = aq\,\mathrm{Cos}\,pt - r\,\mathrm{Cos}\,qt$$

$$4)\quad y = aq\,\mathrm{Sin}\,pt + r\,\mathrm{Sin}\,qt.$$

Die Coordinaten x und y sind durch diese Gleichungen als Funktionen des veränderlichen Wälzungswinkels t gegeben.

Aus 3) und 4) folgt, da $pa = r$ ist,

$$\partial x_t = qr\,(\mathrm{Sin}\,qt - \mathrm{Sin}\,pt)$$

$$\partial y_t = qr\,(\mathrm{Cos}\,qt + \mathrm{Cos}\,pt)$$

also ist

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{\mathrm{Cos}\,qt + \mathrm{Cos}\,pt}{\mathrm{Sin}\,qt - \mathrm{Sin}\,pt}$$

oder

$$5)\quad \partial y_x = \mathrm{Cotg}\,\frac{q-p}{2}\,t = \mathrm{Cotg}\,\frac{a-2r}{2a}\,t.$$

§. 259.

Es ist

$$1)\quad \mathrm{Subtg} = (aq\,\mathrm{Sin}\,pt + r\,\mathrm{Sin}\,qt)\,\mathrm{tg}\,\frac{a-2r}{2a}\,t$$

$$2)\quad \mathrm{Subn} = (aq\,\mathrm{Sin}\,pt + r\,\mathrm{Sin}\,qt)\,\mathrm{Cotg}\,\frac{a-2r}{2a}\,t.$$

Man denke die Normale der Hypocykloide in Q, und nehme an, sie schneide die Achse in G; so ist

$$\mathrm{tg}\,QGX = -\,\mathrm{tg}\,\frac{a-2r}{2a}\,t$$

also

$$\mathrm{tg}\,QGM = \mathrm{tg}\,\frac{a-2r}{2a}\,t$$

und

$$\angle QGM = \frac{a-2r}{2a}\,t.$$

Man denke ferner die Sehne QN des Erzeugungskreises und nehme an, sie schneide die Achse in K, so ist aus dem Dreieck NMK

$$\angle QKM = \angle QNM - \varphi$$

$$= \frac{1}{2}t - \varphi = \frac{1}{2}t - \frac{r}{a}t$$

oder
$$\angle QKM = \frac{a - 2r}{2a}t.$$

Es ist also $\angle QGM = \angle QKM$, d. h. die Linie QN ist die Normale für den Punkt Q der Hypocykloide, und deshalb ist weiter QT die Tangente.

§. 260.

Ist der Radius des Erzeugungskreises die Hälfte vom Radius des Grundkreises, so ist die Hypocykloide eine gerade Linie, nämlich ein Durchmesser des Grundkreises.

Denn für $r = \frac{1}{2}a$ gehen die Gleichungen 1) und 2) in §. 258 über in

$$x = 0$$

$$y = a \operatorname{Sin}\frac{t}{2}$$

und diese liefern, Fig. 79, den Durchmesser des Grundkreises, welcher normal auf MB steht. Im Maschinenwesen hat man diesen Umstand benutzt, vermittelst einer drehenden Bewegung eine geradlinigte hervorzubringen.

§. 261.

Die Hypocykloide zu zeichnen, welche einem gegebenen Grundkreise und einem gegebenen Erzeugungskreise entspricht, construirt man zunächst eine Anzahl Punkte derselben, und zeichnet dann durch sie die Hypocykloide aus freier Hand. Das Verfahren, solche Punkte zu erhalten, ist dem bei der Epicykloide analog.

§. 262.

Die gewöhnliche Cykloide wurde beschrieben durch irgend einen Punkt der Peripherie eines Kreises, welcher längs einer geraden Linie rollt. Es liegt sehr nahe, auch die Linie in Betracht zu ziehen, welche von einem innerhalb des Kreises angenommenen Punkt beschrieben wird, und die Linie, welche beschrieben wird von einem Punkt außerhalb des Kreises. Jene wird die verlängerte oder gestreckte Cykloide genannt, diese die verkürzte oder verschlungene. Eben so kann man eine verlängerte und eine verkürzte Epicykloide, und eine verlängerte und eine verkürzte Hypocykloide in Betracht ziehen. Endlich können überhaupt der Wälzungslinien unendlich viele gebildet

werden; denn wenn man irgend eine Curve längs irgend einer anderen wälzt, so beschreibt jeder Punkt der gewälzten Curve eine Wälzungslinie, auch jeder Punkt, dessen Lage zu der gewälzten Curve eine feste ist.

IV. Kreisevolvente.

§. 263.

Es werde, Fig. 80, ein fester Kreis zum Radius r gedacht. Um den Kreis sei ein Faden gewickelt. Der Faden werde unter steter Spannung abgewickelt, und indem er stets mit dem Kreise in einerlei Ebene bleibt. Der Punkt Q des Fadens, welcher sich zuerst von der Peripherie ablöste (der Endpunkt des Fadens) beschreibt dabei eine krumme Linie. Diese ist die Evolvente des Kreises, während der Kreis die Evolute jener Curve ausmacht. Die Kreisevolvente zieht sich in unendlich vielen Windungen um den Kreis. Der abgewickelte Faden ist stets Tangente für den Kreis, stets Normale für die Evolvente, und stets gleich dem Kreisbogen, von welchem er gewickelt wurde. Alles dies erhellet aus dem sechsten Kapitel.

Es sei A derjenige Punkt der Peripherie des Kreises, in welchem sich der Endpunkt Q des Fadens zu Anfange befand, und der Faden sei abgewickelt, bis er in seine gegenwärtige Lage VQ gelangt ist. A heißt der Anfangspunkt der Evolvente. Durch M und A werde die unendliche gerade Linie MS gelegt. Sie soll als erste Achse, M als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten dienen. Es sei QS normal auf MS, MS = x, QS = y; der Winkel VMS sei φ. Es sei VB normal auf der ersten Achse, QC normal auf VB. Der Winkel QVC ist alsdann gleich φ, welches daraus erhellet, daß QV Tangente, also QVM ein rechter Winkel ist. Unter φ Bogenmaaß verstanden, ist Bogen AV = $r\varphi$, also auch

$$1)\quad VQ = r\varphi$$

und

$$2)\quad x = r(\varphi \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cos}\varphi)$$

$$3)\quad y = r(\operatorname{Sin}\varphi - \varphi \operatorname{Cos}\varphi).$$

Durch diese Gleichungen sind x und y als Funktionen von φ gegeben, und sie reichen zur Bestimmung der Evolvente aus.

Aus 2) und 3) folgt beziehlich

$$4)\quad \partial x_\varphi = r\varphi \operatorname{Cos}\varphi$$

$$5)\quad \partial y_\varphi = r\varphi \operatorname{Sin}\varphi$$

also ist
$$6)\quad \partial y_x = \operatorname{tg}\varphi.$$

§. 264.

Nach dem sechsten Kapitel ist

$$1)\quad \text{Subtg} = r(\operatorname{Sin}\varphi - \varphi \operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Cotg}\varphi$$
$$= r(1 - \varphi \operatorname{Cotg}\varphi)\operatorname{Cos}\varphi$$
$$2)\quad \text{Subn} = r(\operatorname{Sin}\varphi - \varphi\operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{tg}\varphi$$
$$= r(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)\operatorname{Sin}\varphi.$$

Die Construction der Normale und der Tangente für irgend einen Punkt Q der Kreisevolvente ergiebt sich aus dem Umstande, daß die von Q aus an den Kreis gelegte Tangente QV die Normale für den Punkt Q ist. Zugleich wird in $QV = r\varphi$ der Krümmungshalbmesser für den Punkt Q geboten, und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes V sind $r\operatorname{Cos}\varphi$ und $r\operatorname{Sin}\varphi$.

§. 265. Aufgabe.

Man soll die Kreisevolvente rectificiren.

Auflösung. Es sei Bogen AQ, Fig. 80, gleich f_x, so ist

$$f_x = \int\sqrt{1+\partial y_x{}^2}\,dx$$

oder, wenn wir x als Funktion von φ einführen,

$$f_\varphi = \int_0^\varphi \sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2}\,\partial x_\varphi\, d\varphi$$
$$= \int_0^\varphi \sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2}\cdot r\varphi\operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi$$
$$= r\int_0^\varphi \varphi\, d\varphi$$

also Bogen $AQ = f_\varphi = \frac{1}{2}r\varphi^2$.

§. 266. Aufgabe.

Man soll, Fig. 80, den Inhalt der Fläche MAQ bestimmen.

Auflösung. Der Inhalt der Fläche sei F_φ. Man lasse φ wachsen um $d\varphi$, so wächst F_φ um $dF_\varphi = MQG$, der Bogen $AQ = f_\varphi$ wächst um $df_\varphi = QG$, die Linie MQ, welche z bezeichnen mag, wächst um dz, das, wenn wir mit MQ den Bogen QD schlagen, in DG sichtbar wird, und endlich ist MG gleich $z + dz$. Es ist jetzt

$$1)\quad dF_\varphi = \tfrac{1}{2}MG\cdot QD.$$

Aus dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck QDG ist

2) $QD = \sqrt{QG^2 - DG^2} = \sqrt{df_\varphi^2 - dz^2}$.

Nach dem vorigen Paragraphen ist

3) $df_\varphi = r\varphi\, d\varphi$.

Aus der Figur ist

$$MQ = z = \sqrt{MV^2 + VQ^2}$$
$$= \sqrt{r^2 + r^2\varphi^2}$$

also 4) $z = r\sqrt{1+\varphi^2}$

und 5) $dz = \dfrac{r\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} d\varphi$.

Da nun $MG = z + dz$, so hat man nach 1) und 2)

$$dF_\varphi = \tfrac{1}{2}(z + dz)\sqrt{df_\varphi^2 - dz^2}$$

oder, weil der Summand dz gegen z verschwindet, und wenn man die Werthe aus 4), 3) und 5) substituirt,

$$dF_\varphi = \tfrac{1}{2} r\sqrt{1+\varphi^2}\sqrt{r^2\varphi^2 d\varphi^2 - \frac{r^2\varphi^2 d\varphi^2}{1+\varphi^2}}$$
$$= \tfrac{1}{2} r^2 \varphi^2 \cdot d\varphi$$

also $F_\varphi = \tfrac{1}{2} r^2 \int_0^\varphi \varphi^2\, d\varphi$

oder $F_\varphi = \tfrac{1}{6} r^2 \varphi^3$.

§. 267. Aufgabe.

Es ist, Fig. 81, ein Kreis zum Radius r als Evolute gegeben, man soll die Evolvente zeichnen.

Auflösung. Es sei A der Anfangspunkt der Evolvente. Man zeichne den Durchmesser AB, normal darauf BC, nehme BC gleich der halben Peripherie des Kreises, theile BC in irgend eine Anzahl gleicher Theile, etwa 8, den Halbkreis AVB in eben so viele gleiche Theile. Nach irgend einem Theilpunkt des Halbkreises, etwa V, ziehe man den Radius MV, construire die Tangente VQ, und wenn V der nte Theilpunkt des Halbkreises von A aus ist, so mache man VQ gleich n Theilen der Linie BC, und Q ist ein Punkt der Evolvente. In ähnlicher Weise kann man so viele Punkte der Evolvente herstellen, als man für nöthig erachtet, dieselbe zu zeichnen.

V. Logarithmische Linie.

§. 268.

Jede Curve, bei welcher die Abscissen eine arithmetische, die dazu gehörigen Ordinaten aber eine geometrische Reihe ausmachen, heißt eine **logarithmische Linie**.

Es sei, Fig. 82, AB die Abscissenachse, A Anfangspunkt der Coordinaten, A'B' eine logarithmische Linie. Die Ordinate im Anfangspunkt sei a, und einer beliebigen Abscisse b entspreche die Ordinate c. Durch die Werthe a, b, c ist die logarithmische Linie bestimmt. Denn die den Abscissen

$$0 \quad b \quad 2b \quad 3b \quad . \; . \; . \quad nb$$

entsprechenden Ordinaten sind, wie leicht erhellet,

$$a \quad c \quad \frac{c^2}{a} \quad \frac{c^3}{a^2} \quad . \; . \; . \quad \frac{c^n}{a^{n-1}}$$

und setzen wir die allgemeine Abscisse

$$x = nb$$

so ist die dazu gehörige Ordinate

$$y = \frac{c^n}{a^{n-1}} = a\left(\frac{c}{a}\right)^n$$

woraus, da $n = \frac{x}{b}$, die Gleichung entspringt

$$1) \quad y = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}}$$

Diese Gleichung kann als allgemeine Gleichung der logarithmischen Linien betrachtet werden. Aus ihr folgt

$$\left(\frac{y}{a}\right)^b = \left(\frac{c}{a}\right)^x$$

oder auch $$b \ln \frac{y}{a} = x \ln \frac{c}{a}.$$

Der größeren Einfachheit wegen setze man a = 1; die Gleichung 1) geht dann über in

$$2) \quad y = c^{\frac{x}{b}}$$

oder $$y^b = c^x$$

$$b \ln y = x \ln c$$

$$b : x = \ln c : \ln y.$$

Für jeden positiven oder negativen Werth von x bleibt y positiv. Daher liegt die Curve auf einer Seite der Abscissenachse. Für positive wachsende Werthe von x wächst auch y, für negative abnehmende, in absoluter Hinsicht wachsende, Werthe von x nimmt y ab; der letzte Umstand bedingt, daß die Abscissenachse Asymptote der Curve ist.

Die Gleichung 2) wird von uns zu Grunde gelegt werden. Nach ihr ist

$$\partial y_x = c^{\frac{x}{b}} \cdot \frac{\ln c}{b}$$

$$\partial^2 y_x = c^{\frac{x}{b}} \cdot \left(\frac{\ln c}{b}\right)^2$$

oder, wenn wir den Quotienten $\frac{\ln c}{b}$ durch q bezeichnen und für $c^{\frac{x}{b}}$ den Werth y setzen,

$$3)\quad \partial y_x = qy$$

$$4)\quad \partial^2 y_x = q^2 y.$$

§. 269.

Es folgt jetzt

$$1)\quad \text{Subtg} = \frac{1}{q}$$

$$2)\quad \text{Subn} = qy^2$$

und wenn man unter a′ und b′ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, unter r den Radius des Krümmungskreises versteht,

$$3)\quad a' = x - \frac{1+q^2y^2}{q}$$

$$4)\quad b' = y + \frac{1+q^2y^2}{q^2y}$$

$$5)\quad r' = \frac{(1+q^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{q^2y}.$$

Die Subtangente ist also constant.

§. 270.

Es bezeichne f_x den mit der Abscisse 0 anfangenden Bogen. Dann ist

$$f_x = \int_0^x \sqrt{1 + \partial y_x{}^2}\, dx.$$

Die zu integrirende Funktion ist von unbequemer Gestalt. Sie vereinfacht sich, wenn man x als Funktion ψ_y von y einführt. Zu dem Ende müßte aus der Gleichung 2) §. 268 x entwickelt und der erhaltene Werth substituirt werden. Die Entwickelung ist aber nicht nothwendig, denn die Gleichung 3) §. 268 liefert ∂y_x als Funktion von y, es ist $\partial x_y = \frac{1}{\partial y_x}$, und die Gleichung 2) §. 268 ist diejenige, welche die neuen Gränzen liefert in den Werthen von y für x = 0 und x = x. Daher hat man sofort

$$f_x = \int_1^{c^{\frac{x}{b}}} \sqrt{1 + q^2 y^2} \cdot \frac{1}{qy} \cdot dy.$$

Es ist

$$\int \frac{\sqrt{1 + q^2 y^2}}{y} dy = \sqrt{1 + q^2 y^2} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 + q^2 y^2}}{y}$$

also

$$\int_1^y \frac{\sqrt{1 + q^2 y^2}}{y} dy = \sqrt{1 + q^2 y^2} - \sqrt{1 + q^2} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 + q^2 y^2}}{y(1 - \sqrt{1 + q^2})}$$

folglich ist

$$\frac{1}{q}\left[\sqrt{1 + q^2 y^2} - \sqrt{1 + q^2} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 + q^2 y^2}}{y(1 - \sqrt{1 + q^2})}\right]$$

der Bogen, wenn nämlich $c^{\frac{x}{b}}$ statt y gesetzt wird.

Und bezeichnet φ_x den Inhalt der Fläche ADGA′, Figur 82, so ist

$$\varphi_x = \int_0^x c^{\frac{x}{b}}\, dx = b \int_0^x c^{\frac{x}{b}}\, \partial\left(\frac{x}{b}\right) dx$$

also entsteht

$$\varphi_x = \frac{b}{\ln c}\left(c^{\frac{x}{b}} - 1\right).$$

§. 271. Aufgabe.

Eine logarithmische Linie zu zeichnen.

Auflösung. Man bestimme, Fig. 83, zwei einander nahe liegende Ordinaten AA′ und BB′, mache BC = CD

$= \ldots = AB$, ziehe $B'A'$ bis zum Durchschnitt A'', mache auch $A''B'' = B''C'' = \ldots = AB$, errichte in C, $D \ldots$ Normalen, ziehe $B''B'$ bis zum Durchschnitt C' mit der Ordinate CC', $C''C'$ bis zum Durchschnitt D' mit der Ordinate DD' u. s. f. und die Punkte A', B', C', D' u. s. f. gehören einer logarithmischen Linie an. Es verhält sich nämlich

$$BB' : AA' = BA'' : AA''$$
$$CC' : BB' = CB'' : BB''$$
$$DD' : CC' = DC'' : CC'' \text{ u. s. f.}$$

Es ist aber nach der Construction $AA'' = BB'' = CC'' = \ldots$ und $BA'' = CB'' = DC'' = \ldots$ folglich verhält sich auch

$$CC' : BB' = BB' : AA'$$
$$DD' : CC' = CC' : BB' \text{ u. s. f.}$$

ist daher $BB' = q\,AA'$, so ist $CC' = q\,BB' = q^2\,AA'$, $DD' = q^3\,AA'$ u. s. f. Die Ordinaten bilden also eine geometrische Reihe, während die Abscissen eine arithmetische ausmachen, und deshalb ist die Linie, welcher die Punkte A' B' $C' \ldots$ zugehören, eine logarithmische.

IV. Archimedische Spirale (Spinnlinie, Neoide).

§. 272.

Jede Linie, welche in unendlich vielen Windungen um einen festen Punkt läuft, pflegt man eine Spirale zu nennen. Spiralen lassen sich in mannigfacher Weise erzeugen. Dreht sich z. B. eine unendliche gerade Linie um einen festen Punkt P, und bewegt sich gleichzeitig ein Punkt Q längs der unendlichen geraden Linie, so beschreibt Q eine Spirale. Für Spiralen sind Polar-Coordinaten vorzüglich geeignet.

§. 273.

Die Curve, deren Polargleichung ist:

$$y = a + bx$$

heißt lineare oder archimedische Spirale. Da die Abweichung x jeden positiven oder negativen Werth erhalten kann, erhellet, daß die Curve aus unendlich vielen Windungen besteht.

§. 274.

Es sei, Fig. 84,

$$y'' = a + bx''$$
$$y' = a + bx'$$
$$y = a + bx$$

so folgt

$$1)\quad y'' - y' : y' - y = x'' - x' : x' - x$$

d. h. die Differenzen der veränderlichen Radien verhalten sich wie die Differenzen der zugehörigen Abweichungen. Ist also $x'' - x' = x' - x$, so ist auch $y'' - y' = y' - y$, d. h. wenn die Winkel um gleiche Stücke wachsen, so wachsen auch die veränderlichen Radien um gleiche Stücke.

Aus 1) folgt

$$2)\quad y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}x + \frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}$$

und das ist die Gleichung der archimedischen Spirale, welche durch zwei Punkte C und D geht, die vermittelst ihrer Polar-Coordinaten x' und y' und x'' und y'' gegeben sind.

Die Gleichungen 1) und 2) stimmen mit denen in §. 25 überein; und es fällt in die Augen, daß sich mehr übereinstimmende Resultate aufstellen lassen.

§. 275.

In dem Maschinenwesen muß häufig durch eine drehende Bewegung eine geradlinigt hin und her gehende Bewegung hervorgebracht werden. Soll eine gleichmäßig drehende Bewegung eine gleichmäßig hin und her gehende bewirken, so kann dies in manchen Fällen durch die archimedische Spirale geschehen. Denn man stelle sich vor, der Theil ACDB der archimedischen Spirale, Fig. 84, sei zur Linken wiederholt, und es drehe sich die herzförmige Figur um den Pol P mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit, die Linie GA ruhe auf dem Herz, und es sei der Linie GA nur ein Steigen und Sinken verstattet, so wird die Linie GA sich in gleichmäßiger Geschwindigkeit um das Stück VB heben und senken, weil nach dem vorigen Paragraph, wenn die Winkel x um gleiche Stücke wachsen, auch die veränderlichen Radien um gleiche Stücke zunehmen. Wegen der Anwendung bei Spinnmaschinen hat die Curve den Namen Spinnlinie erhalten.

Die Construktion eines solchen herzförmigen Rades ist sehr einfach: Man schlägt mit PA als Radius einen Kreis, verlängert den Durchmesser um den Hub VB, theilt den Halb-

kreis AV in irgend eine Anzahl gleicher Theile, etwa 8, VB in eben so viele gleiche Theile; darauf zieht man die Radien P1, P2, P3, . . . und verlängert dieselben beziehlich um 1, 2, 3, . . . Theile von VB. Dadurch erhält man Punkte der Spirale.

Analytisch betrachtet ist die Gleichung der archimedischen Spirale herzuleiten, deren Pol P ist, und welche durch die Punkte A und B geht. Die Polar-Coordinaten des Punktes A sind $x' = 0$ und $y' = r$, die des Punktes B sind $x'' = \pi$ und $y'' = r + c$; substituirt man diese Werthe in der Gleichung 2) des vorigen Paragraphen, so entsteht

$$y = r + \frac{c}{\pi} x.$$

§. 276.

Es sei $y = a + bx$ die Gleichung einer archimedischen Spirale. Dann ist $\partial y_x = b$, und es entsteht, nach §. 244,

1) Polarsubtangente $= \frac{(a+bx)^2}{b}$ 2) Polarsubnormale $= b$

$$3) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b} + x.$$

Bezeichnet f_x den Inhalt der Figur, welche von den Radien PA und PN und dem Bogen AN begränzt ist, so folgt

$$f_x = \tfrac{1}{2}\int_0^x (a+bx)^2 \, dx$$
$$= \tfrac{1}{2} x (a^2 + abx + \tfrac{1}{3} b^2 x^2).$$

Und bezeichnet φ_x die Länge des Bogens AN, so ist

$$\varphi_x = \int_0^x \sqrt{a^2 + 2abx + b^2 x^2 + b^2} \, dx$$

und es ergiebt sich

$$\int \sqrt{a^2 + b^2 + 2abx + b^2 x^2} \, dx = \frac{a+bx}{2b} \sqrt{a^2 + b^2 + 2abx + b^2 x^2}$$
$$+ \frac{b}{2} \ln (a + bx + \sqrt{a^2 + b^2 + 2abx + x^2})$$

also ist $\varphi_x = \frac{(a+bx)\sqrt{a^2 + b^2 + 2abx + x^2} - a\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$

$$+ \frac{b}{2} \ln \frac{a + bx + \sqrt{a^2 + b^2 + 2abx + x^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

§. 277.

Jeder Punkt, in welchem eine Curve sich selbst schneidet, heißt ein **Knoten**. Die archimedische Spirale hat unendlich viele Knoten. Legen wir die Gleichung $y = r + \frac{c}{\pi} x$ zu Grunde, so sind die Polar-Coordinaten des ersten Knotens:

$$x' = \frac{(c - 2r)\pi}{2c}$$

$$y' = \frac{c}{2}$$

Sämmtliche Knoten liegen in einer geraden Linie, welche durch den Pol geht; sie bildet also mit der festen Linie den Winkel x'.

VII. Logarithmische Spirale.

§. 278.

Eine Spirale, bei welcher die veränderlichen Winkel eine arithmetische Reihe bilden, während die zugehörigen veränderlichen Radien eine geometrische Reihe ausmachen, heißt eine **logarithmische** Spirale.

Zu den Winkeln

$$0,\quad \alpha,\quad 2\alpha,\quad 3\alpha,\quad \ldots\ldots\quad n\alpha$$

mögen beziehlich die Radien

$$r,\quad rq,\quad rq^2,\quad rq^3,\quad \ldots\ldots\quad rq^n$$

gehören. Man setze den veränderlichen Winkel x gleich $n\alpha$, so ist der ihm entsprechende Radius-Vector y gleich rq^n, und wenn man n eliminirt, entsteht

$$y = rq^{\frac{x}{\alpha}}$$

als Gleichung der logarithmischen Spirale. Aus der Gleichung folgt

$$\alpha : x = \ln q : \ln \frac{y}{r}$$

daher die Benennung. Den Werth $q^{\frac{1}{\alpha}}$ setzen wir gleich $e^{\frac{1}{m}}$, unter e die Grundzahl 2,718 ... verstanden. Die obere Gleichung geht dadurch über in

$$1)\quad y = re^{\frac{x}{m}}$$

und dieser Gleichung werden wir uns bedienen.

Aus 1) folgt

$$2)\quad \partial y_x = \frac{r}{m} e^{\frac{x}{m}}.$$

Für positive wachsende Werthe von x wächst y ohne Ende, für negative Werthe von x nimmt y ohne Ende ab. Die Spirale läuft also in unendlich vielen Windungen um den Pol, ohne ihn zu erreichen.

§. 279.

Es ergiebt sich jetzt

$$1)\quad \text{Polarsubtangente} = m \cdot re^{\frac{x}{m}}$$

$$2)\quad \text{Polarsubnormale} = \frac{1}{m} \cdot re^{\frac{x}{m}}$$

$$3)\quad \operatorname{tg} \gamma = m.$$

Alle Tangenten der logarithmischen Spirale bilden also mit dem Radius-Vector ihres Berührungspunktes einerlei Winkel. Es sei, Fig. 85, QS ein Messer, gestaltet nach einer logarithmischen Spirale, deren Pol P ist; die gerade Linie PV gehe durch den Pol: bei einer Drehung der Spirale um den Pol wird das Messer längs der geraden Linie PV einen Schnitt unter stets gleichem Winkel führen.

Soll der Winkel, unter welchem der Schnitt geführt wird 60° betragen, und dies ist am angemessensten, so ist

$$m = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$y = re^{\frac{x}{m}} = re^{\frac{x}{\sqrt{3}}}$$

$$\operatorname{Log} \frac{y}{r} = \frac{x}{\sqrt{3}} \operatorname{Log} e$$

oder x in Grade verwandelt

$$\operatorname{Log} \frac{y}{r} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} 0{,}4342944819 \ldots x$$

$$\operatorname{Log} \frac{y}{r} = 0{,}0043762 \ldots x.$$

Hiernach berechnet sich folgende Tabelle zusammengehöriger Werthe der Abweichung x und des Radius-Vector y bei beliebig zu wählendem r.

x	y	x	y
0°	r	65°	1,9251 r
5°	1,0517 r	70°	2,0246 r
10°	1,1060 r	75°	2,1292 r
15°	1,1632 r	80°	2,2392 r
20°	1,2233 r	85°	2,3549 r
25°	1,2865 r	90°	2,4766 r
30°	1,3530 r	95°	2,6046 r
35°	1,4229 r	100°	2,7392 r
40°	1,4964 r	105°	2,8807 r
45°	1,5737 r	110°	3,0296 r
50°	1,6550 r	115°	3,1862 r
55°	1,7406 r	120°	3,3508 r
60°	1,8305 r	125°	3,5239 r

Soll der Winkel 30° betragen so ist $m = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

und $$y = re^{x\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{Log} \frac{y}{r} = 0{,}0131287 \ldots x°$$

und hiernach

x	y	x	y
0°	r	65°	7,1345 r
5°	1,1632r	70°	8,2986 r
10°	1,3530r	75°	9,6526 r
15°	1,5737r	80°	11,2276 r
20°	1,8302r	85°	13,0596 r
25°	2,0939r	90°	15,1906 r
30°	2,4766r	95°	17,6692 r
35°	2,8814r	100°	20,5523 r
40°	3,3508r	105°	23,9058 r
45°	3,8975r	110°	27,8065 r
50°	4,5335r	115°	32,3436 r
55°	5,2732r	120°	37,6211 r
60°	6,1336r	125°	43,7598 r

Man nehme an die Spirale, Fig. 85, sei für den Winkel von 30 Graden construirt, und denke die Spirale für denselben Pol noch einmal, aber in entgegengesetzter Lage. Wird dann die eine Spirale um den Pol gedreht, so schneiden sich beide Spiralen stets unter einem Winkel von 60 Graden. Hiernach werden die Hauschläge auf den Mühlsteinen zum Mahlen des Getreides construirt.

§. 280.

Bezeichnet f_x den Inhalt der Fläche von $x = x'$ bis $x = x''$, so hat man

$$f_x = \tfrac{1}{2}\int_{x'}^{x''} r^2 e^{\frac{2x}{m}} dx = \frac{mr^2}{4}\int_{x'}^{x''} e^{\frac{2x}{m}} \partial \frac{2x}{m} dx$$

$$= \frac{mr^2}{4}\left[e^{\frac{2x''}{m}} - e^{\frac{2x'}{m}}\right]$$

Und bezeichnet φ_x den Bogen von $x = x'$ bis $x = x''$, so ist

$$\varphi_x = \int_{x'}^{x''} \sqrt{r^2 e^{\frac{2x}{m}} + \frac{1}{m^2} r^2 e^{\frac{2x}{m}}}\, dx$$

$$= r\sqrt{1+m^2} \int_{x'}^{x''} e^{\frac{x}{m}} \partial \frac{x}{m} dx$$

$$= r\sqrt{1+m^2} \left[e^{\frac{x''}{m}} - e^{\frac{x'}{m}} \right].$$

VIII. Conchoide.

§. 281.

Es sei, Fig. 86, eine gerade Linie OX gegeben, außerhalb derselben ein Punkt P durch seine Entfernung b von der geraden Linie OX. Durch den Punkt P gehe eine gerade Linie PQ; diese drehe sich um den Punkt P, und auf derselben bewegen sich zwei Punkte Q und Q′ dergestalt, daß die Entfernung eines jeden von dem Durchschnittspunkt V der Linien OX und PQ stets gleich a sei: die Linie, welche durch die Punkte Q und Q′ beschrieben wird, heißt Conchoide.

Punkte der Conchoide zu erhalten, darf man nur durch P eine beliebige Linie PQ ziehen, welche OX schneidet, und VQ gleich VQ′ gleich a nehmen, so sind Q und Q′ zwei Punkte der Conchoide, deren in derselben Weise sich beliebig viele erlangen lassen.

Der Theil CQ heißt die obere Conchoide, C′Q′ die untere; die Linie OX wird die Grundlinie, die Linie PQ die erzeugende Linie, der Punkt P der Pol, jeder der Punkte C und C′ ein Scheitel der Conchoide genannt Die Scheitel C und C′ theilen die Conchoide in vier Zweige und für jeden derselben ist die Grundlinie OX Asymptote.

Die Grundlinie OX diene als erste Achse, O als Anfangspunkt der Coordinaten. PQ sei die erzeugende Linie in irgend einer Lage, x und y seien die Coordinaten des Punktes Q. Die Coordinaten des Punktes V sind OV und Null. Daher hat man VQ^2 oder

$$1)\quad a^2 = (y-0)^2 + (x-OV)^2.$$

Die Gleichung der Linie PQ ist, n unbestimmt angesehen,

$$2)\quad y = nx - b.$$

Für $y = 0$ folgt hieraus x oder

$$OV = \frac{b}{n}$$

Aus 2) ist $n = \frac{b+y}{x}$, daher ist

$$3)\quad OV = \frac{bx}{b+y}.$$

Dies in 1) gesetzt, liefert

$$a^2 = y^2 + x^2 \frac{y^2}{(b+y)^2}$$

oder, wenn man x entwickelt,

$$4)\quad x = \frac{(b+y)\sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Dasselbe gilt für den Punkt Q'. Daher ist dies die Gleichung der Conchoide. Geordnet erhält diese Gleichung die Gestalt:

$$y^4 + 2by^3 + (b^2 - a^2 + x^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0$$

oder für ein negatives y, wie bei Q'

$$y^4 - 2by^3 + (b^2 - a + x^2)y^2 + 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

Die Conchoide ist also eine Curve vom vierten Grade. Uebrigens erhält man für $y = +k$ aus der Gleichung 4) durch die verschiedenen Vorzeichen der Wurzel zwei entgegengesetzte, in absoluter Hinsicht gleiche Werthe für x; eben so für $y = -k$; es bestehen demnach vier verschiedene Abscissen, von welchen zwei und zwei in absoluter Hinsicht gleich sind, und denen in absoluter Hinsicht gleiche Ordinaten entsprechen.

Auch aus der Figur ist die Gleichung 4) leicht zu entnehmen. Denn man hat aus dem Dreieck VDQ

$$a^2 = y^2 + (x - OV)^2$$

und aus den ähnlichen Dreiecken POV und QDV

$$b : y = OV : x - OV$$

also

$$OV = \frac{bx}{b+y}.$$

Dann aus dem Dreieck VQ'D', unter x und y die Coordinaten des Punktes Q' verstanden,

$$a^2 = y^2 + (OV - x)^2$$

und aus den Dreiecken POV und Q'D'V in absoluter Hinsicht

$$b : y = OV : OV - x$$

also $$OV = \frac{bx}{b-y}$$

oder $$OV = \frac{bx}{b+y}$$

wenn, wie es sein muß, y an sich als negativ gilt. Substituirt man den Werth von OV, so entsteht in beiden Fällen die Gleichung 4).

Denkt man von D und D' aus Linien parallel mit VP gezogen bis zum Durchschnitt mit CP, so hat man die Proportionen

$$b + y : x = y : \sqrt{a^2 - y^2}$$

und $$b - y : x = y : \sqrt{a^2 - y^2}$$

und jede ist geradezu die Gleichung 4).

Aus 4) folgt

$$5) \quad \partial x_y = -\frac{a^2 b + y^3}{y^2 \sqrt{a^2 - y^2}}$$

Daher ist

$$6) \quad \partial y_x = -\frac{y^2 \sqrt{a^2 - y^2}}{a^2 b + y^3}.$$

Für P als Pol, PC als feste Linie, CPQ als veränderlichen Winkel x und PQ oder PQ' als veränderlichen Radius hat man sofort die Polargleichung

$$7) \quad y = b \operatorname{Sec} x \pm a$$

und daraus

$$8) \quad \partial y_x = b \operatorname{tg} x \operatorname{Sec} x.$$

Die Conchoide nimmt verschiedene Gestalt an. In der Figur ist sie dargestellt, während $b > a$ ist. Ist $b = a$, so entsteht in P eine Spitze, ist $b < a$, so bildet sich unter P eine Schleife, deren Knoten P ist.

§. 282.

Die Fläche CPQ drückt sich nach der Gleichung 7) im vorigen Paragraphen aus durch

$$\frac{1}{2}\int_0^x (a+b\,\mathrm{Sec}\,x)^2$$

und es ist

$$\int(a^2+2ab\,\mathrm{Sec}\,x+b^2\,\mathrm{Sec}\,x^2) = a^2x+2ab\ln\mathrm{tg}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)+b^2\mathrm{tg}x$$

Der letzte Ausdruck verschwindet mit x = 0. Daher ist die Fläche CPQ gleich

$$\tfrac{1}{2}[a^2x+2ab\ln\mathrm{tg}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)+b^2\mathrm{tg}\,x].$$

Setzt man a negativ, so entsteht hieraus der Inhalt der Fläche C′PQ′. Subtrahirt man den Inhalt des Dreiecks POV und addirt den des Dreiecks VQD, so entsteht der Inhalt des Stückes CODQ; u. m. dgl.

§. 283.

Die Conchoide hat in der Architektur Anwendung gefunden zur Verjüngung und Schwellung der Säulenschafte; auch hat man sich ihrer bedient, den Inhalt von Fässern zu bestimmen, (§. 346).

§. 284.

Statt der geraden Linie OX, kann irgend eine krumme Linie als Basis benutzt werden, welches dann zu Conchoiden höherer Ordnung führt.

Ueber die Gestalt der Räderzähne.

§. 285.

Als einen Nachtrag zu den Cykloiden und zur Kreisevolvente, wollen wir darthun, daß nach diesen Curven die Zähne der Räder zu gestalten sind, wenn gleichförmige Bewegung Statt finden soll.

§. 286.

Man denke, Fig. 87, zwei Kreise, welche sich von außen berühren, die Mittelpunkte A und B der Kreise seien fest, jeder Kreis aber um seinen Mittelpunkt drehbar. Man stelle sich vor, der Kreis B werde gedreht in der Richtung CC′, es finde Reibung zwischen den Peripherien der Kreise Statt, und vermittelst ihrer werde die Bewegung des Kreises B dem Kreise A mitgetheilt, so daß die Berührungspunkte beider Kreise stetig wechseln. Der Kreis A wird dann in der Richtung PP′ sich drehen, und es werden in gleichen Zeiten gleiche Bogen beider Peripherieen durch die Centrale gehen, d. h. wenn die Kreise sich Anfangs etwa in den Punkten C′ und P′ berührten und sich gegenwärtig berühren in C und P, so werden die Bogen CC′ und PP′ einander gleich sein.

Die Bedingung, daß in gleichen Zeiten gleiche Bogen beider Kreise durch die Centrale gehen, ist es, auf deren Erfüllung es uns hier zunächst ankommt.

Die Mittheilung der Bewegung durch Reibung ist nur bei geringem Widerstande anwendbar (und z. B. sehr sinnreich angewendet worden zur Hervorbringung der verzögerten Bewegung der Spulen); bei einem größeren Widerstande, welcher der Drehung des Kreises entgegentritt, wird die Bewegung des Kreises B dem Kreise A nicht mitgetheilt werden, sondern es wird die Peripherie des Kreises B über den Punkt P der Peripherie des Kreises A hinweggleiten. Um in solchen

Fällen die Mittheilung der Bewegung zu erzwingen, versieht man die materiellen Kreisscheiben mit zweckmäßig gestalteten Erhöhungen, deren Ineinandergreifen die Bewegung ungeachtet des Widerstandes vermittelt. Solche Vorrichtungen heißen dann Räder, die Erhöhungen Zähne, Kämme, Stöcke u. s. w. Die Gestalt der Zähne ist nun nicht gleichgültig, außerdem verschieden in verschiedenen Fällen: wir wollen für die hauptsächlichsten Fälle die Gestalt der Zähne bestimmen, immer unter der Bedingung, daß in gleichen Zeiten gleiche Bogen durch die Centrale gehen, wenn nämlich zwei Räder so angeordnet sind, daß eine Drehung des einen eine Drehung des zweiten bedingt, und die Mittheilung der Bewegung durch Zähne hervorgebracht wird.

§. 287.

Man stelle sich, Fig. 87, zwei Kreise A und B vor, welche sich berühren in C (P). CD sei Bogen der Epicykloide, welche hervorgeht, wenn man B als Grundkreis, A als Erzeugungskreis, P als erzeugenden Punkt betrachtet. Der epicykloidische Bogen CD sei mit der Peripherie des Kreises B fest verbunden, und bei einer Drehung des Kreises B in der Richtung CC′ werde der Punkt P der Peripherie des Kreises A durch den Bogen CD fortgeschoben, und in solcher Weise die drehende Bewegung des Kreises B dem Kreise A mitgetheilt: Es werden in gleichen Zeiten gleiche Bogen beider Kreise durch die Centrale gehen. Denn befindet sich nach irgend einer Zeit CD in der Lage C′D′ und P in der Lage P′, so muß jetzt Bogen CC′ gleich Bogen PP′ sein, weil sich P′ längs der Epicykloide C′D′ bewegt hat, und, bei einer Wälzung des Kreises A nach der Linken, P′ den Bogen P′C′ beschreiben würde.

Man stelle sich ferner vor, der epicykloidische Bogen C′D′ reiche nur von C′ bis P′, aber in dem gegenwärtigen Berührungspunkt C sei ein zweiter ihm congruenter epicykloidischer Bogen CD mit der Peripherie des Kreises B verbunden, und ergreife den Punkt P der Peripherie des Kreises A, so wird in dem gegenwärtigen Moment die Wirksamkeit des Bogens C′P′ aufhören, der Bogen CD dagegen die weitere Mittheilung der drehenden Bewegung übernehmen; welches sich offenbar wiederholen läßt. Dabei fällt in die Augen, daß, wenn vollständige Umdrehungen sich erneuern sollen, die Länge

CC′ = PP′ so zu wählen ist, daß CC′ einen aliquoten Theil der Peripherie des Kreises B, und PP′ zugleich einen aliquoten Theil der Peripherie des Kreises A ausmacht. Die Größe des Stückes CC′ pflegt man die Theilung zu nennen.

Nun sei, Fig. 88, die materielle Kreisscheibe A auf der Seitenfläche mit cylindrischen Stäben P, P′, .. versehen, welche die Punkte P, P′ Fig. 87, vertreten. Man denke den epicykloidischen Bogen CD, Fig. 88, für welchen der Kreis B Grundkreis, der Kreis A Erzeugungkreis, der Punkt P Erzeugungspunkt ist, und beschreibe die Curve EF parallel jenem Bogen CD. Die Curve EF wird aber erhalten, wenn man Kreise beschreibt, die dem Kreise P congruent sind, und deren Mittelpunkte auf CD liegen, und dann EF berührend zu diesen Kreisen zeichnet. Es fällt in die Augen, daß die Curve EF die Krümmung der Zähne des Rades B liefert. Die Vertiefung EG dient, dem Stab P Raum zu gewähren; sie ist geradlinigt und fällt in den Radius BE. Das Weitere erklärt leicht die Figur.

Der Stock leidet stärker durch die Reibung als der Zahn, denn der größere Bogen EF des Zahnes gleitet über den kleineren EK des Stockes; und ist A kleiner als B, so sind weniger Stöcke als Zähne vorhanden, weshalb alsdann jeder Stock öfter zur Arbeit kommt als jeder Zahn.

Sollte B durch A bewegt werden, so würde bei derselben Anordnung die Bewegung ebenfalls eine gleichförmige sein. Bei hölzernen Zähnen würde aber die Reibung gegen den Spahn Statt finden.

§. 288.

Es seien, Fig. 89, A und B zwei Kreise, welche sich berühren in C (P). Ueber dem Halbmesser AP des Kreises A als Durchmesser denke man den Kreis E. Der Bogen CD gehöre der Epicykloide an, welche hervorgeht, wenn E als Erzeugungskreis über B als Grundkreis rollt. Man stelle sich vor, CD sei mit der Peripherie des Kreises B fest verbunden, und bei einer Drehung des Kreises B in der Richtung CC′, werde der Radius AP des Kreises A durch den Bogen CD fortgeschoben, und dadurch die drehende Bewegung des Kreises B dem Kreise A mitgetheilt. Bei dieser Annahme gehen von beiden Kreisen A und B in gleichen Zeiten gleiche Bogen durch die Centrale. — Man stelle sich vor, nach irgend einer Zeit befinde sich CD in der Lage C′D′, und AP in der

Lage A'P'. Der Berührungspunkt O des Bogens C'D' und des Radius A'P' liegt in der Peripherie des Kreises E; denn man betrachte zunächst O als Durchschnittspunkt des Bogens C'D' und der Peripherie des Kreises E, so ist einleuchtend, daß, wenn der Erzeugungskreis E links über B gerollt wird, der Punkt O die Epicykloide C'D' beschreibt, und dann ist nach §. 259 AO, d. h. AP', Tangente für C'D'. Zugleich erhellet, daß Bogen CC' gleich Bogen PO ist. Denkt man den Kreis E in der Peripherie des Kreises A gerollt, so beschreibt der Punkt O nach §. 260 den Radius AP' als Hypocykloide, folglich ist auch Bogen PP' gleich Bogen PO. Daher ist endlich Bogen CC' gleich Bogen PP'.

Man stelle sich ferner vor, der Bogen C'D' reiche nur bis O, und in dem gegenwartigen Berührungspunkt C sei ein zweiter jenem congruenter epicykloidischer Bogen CD mit der Peripherie des Kreises B verbunden und ergreife den Radius AP, so wird in dem gegenwärtigen Augenblick die Wirksamkeit des Bogens C'O endigen, der Bogen CD dagegen die Mittheilung der drehenden Bewegung übernehmen. U. s. w.

Hiernach ist Fig. 90 von selbst verständlich. B ist als bewegendes Rad angesehen, A als bewegtes, die Reibung zwischen den Zähnen findet dabei überall in der Richtung von den Mittelpunkten nach den Peripherieen Statt. Auch im umgekehrten Fall, d. h. wenn A bewegendes, B bewegtes Rad sein sollte, würde die Bewegung gleichförmig erfolgen, aber die Reibung würde in entgegengesetzter Richtung Statt finden, also bei hölzernen Zähnen gegen den Spahn. Soll in jedem Fall, das eine oder das andere Rad mag als bewegendes auftreten, die Reibung von den Mittelpunkten nach den Peripherien Statt finden, so müssen die Zähne beider Räder nach demselben Princip construirt werden, wie Fig. 91 zeigt. Ueberhaupt aber ist immer nur festzuhalten, daß, wenn, Fig. 89, ein Rad B ein anderes A bewegen soll, die Krümmung der Zähne des *bewegenden* Rades sich durch die Epicykloide bestimmt, welche den Theilkreis des bewegenden Rades zum Grundkreise und zum Erzeugungskreise den Kreis hat, dessen Radius gleich ist der Hälfte vom Radius des bewegten Kreises, während dann die Zähne des bewegten Rades geradlinigt sind. In der Verlängerung können dann diese letztern Zähne wiederum gekrümmt sein, (Fig. 91), nach derjenigen Epicykloide, die erforderlich ist, damit dieses bewegte Rad zugleich als bewegendes für ein drittes diene (welches Fig. 91 das erste ist, sobald A als bewegendes Rad gilt). Widersprechende Bedin-

gungen stellen sich heraus, wenn ein Rad zwei oder mehrere andere von verschiedenen Durchmessern zugleich treiben sollte.

§. 289.

Der Kreis A, Fig. 92, und die gerade Linie BB′ mögen sich berühren in B (Q), BC sei Bogen der Cykloide, welche durch den erzeugenden Punkt Q beschrieben wird, wenn der Kreis A als Erzeugungskreis über die gerade Linie BB′ als Grundlinie rollt. Der Bogen BC sei fest mit der geraden Linie verbunden. Die gerade Linie werde in sich selbst nach der Richtung BB′ fortbewegt, der Bogen BC treibe dabei den Punkt Q der Peripherie des Kreises, und dieser werde dadurch in eine drehende Bewegung um den Mittelpunkt A versetzt. Die gemeinschaftliche Bewegung findet dergestalt Statt, daß von der geraden Linie und von der Peripherie des Kreises in gleichen Zeiten gleiche Stücke durch die feste Linie AQ gehen, welche wir normal auf BB′ denken. Denn ist nach irgend einer Zeit BC in die Lage B′C′, Q in die Q′ gelangt, so wird, bei einem Rollen des Kreises zur Linken, Q′ den Bogen Q′B′ beschreiben, also BB′ gleich QQ′ sein.

Wenn daher eine materielle Kreisscheibe, welche auf der Seitenfläche mit cylindrischen Stäben versehen ist, durch eine gezahnte Stange (Kammbaum) bewegt werden soll, so sind die Zähne derselben nach einer der Cykloide parallelen Curve zu krümmen, ähnlich wie in §. 287.

Soll ein gezahntes Rad durch eine gezahnte Stange getrieben werden, so finden die Bestimmungen des §. 288 Anwendung, und sind ohne Weiteres zu übertragen, indem man dem Kreise B einen unendlichen Radius giebt, wodurch seine Peripherie in eine gerade Linie übergeht.

Soll endlich eine gezahnte Stange durch ein gezahntes Rad getrieben werden, Fig. 93, so sind die Zähne der Stange gerade zu formen, die des Rades gekrümmt nach der Kreisevolvente. Denn ist DC die Kreisevolvente, so ist BC gleich dem Bogen BD, und deshalb die Bewegung gleichförmig. Hiernach sind im Allgemeinen die Daumen für das Heben der Stampfer zu construiren.

§. 290.

Die Zähne konischer Räder sind nach sphärischen Epicykloiden zu gestalten, deren Construction die beschreibende Geometrie lehrt.

Die Bestimmung der Länge der Zähne u. dgl. m. kann überall leicht durch Rechnung oder Construction erfolgen.

Wir beschränken uns hier auf diese Andeutungen. Die Praxis stellt andere, einfachere und durch Erfahrung bewährte Gesetze auf, doch ist es nöthig, auch die theoretischen Bestimmungen zu kennen.

Dritter Abschnitt.

Achtes Kapitel.

Von der geraden Linie im körperlichen Raume, und von der Ebene.

§. 291.

Man denke drei unendliche auf einander normal stehende Ebenen. Sie schneiden sich in drei unendlichen geraden Linien, welche einen Punkt gemein haben und auf einander normal stehen. Die Ebenen benutzen wir als Projectionsebenen, die Linien als Coordinatenachsen, den Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten. Den Anfangspunkt der Coordinaten bezeichnen wir durch O, die Abscissen auf der einen Achse durch x, die auf einer zweiten durch y, die auf der dritten durch z. Die Achse der x werden wir ferner die erste Achse nennen, die der y die zweite, die der z die dritte. In jeder von den Projectionsebenen befinden sich zwei der Coordinatenachsen. Die Projectionsebene, welche die Achse der x und die der y enthält, möge die erste Projectionsebene heißen, die, welche die Achsen der x und der z enthält die zweite, die der y und z die dritte. Die erste Achse steht normal auf der dritten Projectionsebene, die zweite auf der zweiten, die dritte auf der ersten.

§. 292.

Man stelle sich einen Punkt Q vor, seine projicirenden Linien QQ′, QQ″, QQ‴, und denke durch je zwei derselben eine Ebene. Man erhält drei Ebenen, welche mit den Projectionsebenen ein normales Parallelepipedum bilden. Die zwölf Kanten eines solchen zerfallen in dreimal vier Kanten, einander parallel und gleich. Und man wird erkennen, daß die Abschnitte, welche auf den Coordinatenachsen entstehen, die Lage des Punktes Q bestimmen. Diese Abschnitte sind die Coordinaten des Punktes Q.

§. 293.

Jede von den Coordinatenachsen ist durch den Anfangspunkt O in zwei Theile zerlegt, und indem man die Abscissen stets von O ab aufträgt, erhalten diese entgegengesetzte Lage und entgegengesetzte Vorzeichen. Auf jeder von den Achsen setze man einen Theil als den positiven fest, also den anderen negativ. Die Coordinaten x, y, z eines Punktes Q können alsdann ihre Vorzeichen in acht verschiedenen Combinationen tragen, nämlich

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ + & + & - \\ + & - & + \\ - & + & + \\ + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \\ - & - & - \end{array}$$

entsprechend den acht Räumen, in welche die Projectionsebenen den unendlichen Raum theilen, und in welchen der Punkt sich befinden kann.

§. 294. Aufgabe.

Die Coordinaten eines Punktes A seien x, y, z. Die eines zweiten Punktes B seien x', y', z'. Durch den Punkt A denke man neue Coordinatenachsen, parallel mit den ursprünglichen, und man soll die Coordinaten x'', y'', z'' des Punktes B für die neuen Coordinatenachsen bestimmen.

Auflösung. Es ist nach §. 6

$$x'' = -x + x'$$

$$y'' = -y + y'$$

$$z'' = -z + z'.$$

§. 295.

Ein Punkt Q sei durch die Coordinaten x, y, z gegeben. Man denke die Linie OQ, und es ist

$$OQ^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Man denke die Projection v der Linie OQ auf der ersten Projectionsebene und es ist

$$OQ^2 = v^2 + z^2$$

während

$$v^2 = x^2 + y^2.$$

§. 296. Aufgabe.

Die Coordinaten zweier Punkte A und B seien x, y, z und x′, y′, z′, und man soll die Entfernung der Punkte A und B bestimmen.

Auflösung. Durch den einen der Punkte denke man Coordinatenachsen parallel den ursprünglichen, und man hat nach den beiden vorstehenden Paragraphen

$$AB = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

§. 297.

Eine gerade Linie ist im Allgemeinen durch zwei von ihren drei Projectionen bestimmt. Hier reichen daher im Allgemeinen die Gleichungen zweier der Projectionen zur Bestimmung einer geraden Linie aus. Z. B.

$$x = az + b$$

$$y = a'z + b'.$$

Aus den Gleichungen zweier der Projectionen ergiebt sich die der dritten, indem man den beiden gemeinschaftlichen Veränderlichen eliminirt. Die Gleichungen oben gewähren die zweite und dritte Projection einer geraden Linie. Die Gleichung der ersten Projection entsteht indem man z eliminirt und es ergiebt sich

$$\frac{y-b'}{a'} = \frac{x-b}{a}.$$

§. 298. Aufgabe.

Es sind zwei Punkte durch ihre Coordinaten x′, y′, z′ und x″, y″, z″ gegeben; man soll die Gleichungen der geraden Linie herleiten, welche durch die Punkte geht.

Auflösung. Die Gleichungen der zweiten und dritten Projection der verlangten Linie sind nach §. 25 1)

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z')$$

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z').$$

§. 299. Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien durch ihre Gleichungen gegeben, man soll die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes finden.

Auflösung. Die Gleichungen der einen Linie seien

$$1)\quad x = az + b$$

$$2)\quad y = a'z + b'$$

die der anderen

$$3)\quad x = pz + q$$

$$4)\quad y = p'z + q'.$$

Aus 1) und 3) entwickele man x und z, und es entsteht

$$z = -\frac{b-q}{a-p}$$

$$x = \frac{aq-bp}{a-p}.$$

aus 2) und 4) findet sich

$$z = -\frac{b'-q'}{a'-p'}$$

$$y = \frac{a'q'-b'p'}{a'-p'}.$$

Diese Werthe von x, y, z sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes, vorausgesetzt daß

$$\frac{b-q}{a-p} = \frac{b'-q'}{a'-p'}$$

sei. Stimmen die letzten Ausdrücke nicht überein, so sind die Linien windschief, denn alsdann treffen die Normalen aus den Durchschnittspunkten der zweiten und der dritten Projectionen auf die dritte Achse gefällt, nicht denselben Punkt dieser Achse.

Ist $a = p$ und $a' = p'$ so sind die gegebenen Linien parallel, ist eine der Differenzen $a - p$ und $a' - p'$ gleich Null, die andere nicht, so sind die Linien windschief.

§. 300.

Nach den Entwickelungen des ersten Abschnitts einerseits, und andererseits nach den Prinzipien der Projectionslehre (Beschreibende Geometrie) beantworten sich überhaupt leicht viele hierher gehörigen Fragen; und wir werden uns darauf beschränken, einige Gesetze abzuleiten, deren wir in der Folge bedürfen, und die der Rechnung allein zufallen.

§. 301.

Ein Punkt Q sei gegeben durch die Coordinaten x, y, z. Man denke die Linie OQ. Die Coordinaten x, y, z sind die Projectionen der Linie OQ auf den Achsen. Die Winkel, welche die Linie OQ mit der ersten, zweiten und dritten Achse bildet, seien beziehlich α, β, γ; und es ist

$$1)\quad \mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{x}{OQ}$$

$$2)\quad \mathrm{Cos}\,\beta = \frac{y}{OQ}$$

$$3)\quad \mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{z}{OQ}$$

OQ drückt sich durch $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ aus nach §. 295. Die Winkel α, β, γ zählen wir von den positiven Theilen der Coordinatenachsen bis zur Linie OQ. Sie liegen dann jedesmal zwischen O und 180°; und in den Ausdrücken für ihre Cosinus sind die Coordinaten x, y, z positiv oder negativ zu setzen, wie die Lage des Punktes Q es bedingt, während OQ absolut zu nehmen ist.

§. 302.

Man denke eine unendliche gerade Linie, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehend. Die Linie befindet sich jedesmal in zwei gegenüberliegenden von den acht Theilen, in welche die Projectionsebenen den unendlichen Raum zerlegen. Die Winkel, welche die eine Hälfte der Linie mit den positiven Theilen der Coordinatenachsen bildet, sind die Supplemente zu den Winkeln, welche von der anderen Hälfte mit den positiven Theilen der Coordinatenachsen gebildet werden; und es ist offenbar gleichgiltig, ob man zur Bestimmung der Lage der Linie die einen Winkel oder die anderen benutzt, oder kennt.

Die Projectionen der Linie gehen gleichfalls durch den Anfangspunkt der Coordinaten und es mögen die zweite und die dritte Projection gegeben sein durch die Gleichungen

$$1)\quad x = az$$

$$2)\quad y = a'z.$$

Die Winkel, welche die eine Hälfte der Linie mit den positiven Theilen der Coordinatenachsen bildet, seien α, β, γ. Und ndem man sich irgend einen Punkt dieser Hälfte vorstellt, und dessen Coordinaten gleich x, y, z setzt, hat man nach dem vorigen Paragraphen

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Man dividire Zähler und Nenner der Quotienten durch z, und setze nach 1) und 2) a statt $\frac{x}{z}$, a' statt $\frac{y}{z}$, und es ergiebt sich

$$\text{I.}\quad \operatorname{Cos}\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+a'^2+1}}$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{Cos}\beta = \frac{a'}{\sqrt{a^2+a'^2+1}}$$

$$\text{III.}\quad \operatorname{Cos}\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+a'^2+1}}.$$

Die Nenner in diesen Ausdrücken sind absolut. War z positiv, so haben sich die Vorzeichen der Zähler durch die Division nicht geändert, war aber z negativ, so sind sie in die entgegengesetzten übergegangen, die Winkel also in die Supplementswinkel. Dies ist aber wegen der Bemerkungen zu Anfange dieses Paragraphen ein gleichgiltiger Umstand.

§. 303.

Es seien α, β, γ die Winkel, welche eine Linie, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, mit den Achsen bildet, und es ist

$$\operatorname{Cos}\alpha^2 + \operatorname{Cos}\beta^2 + \operatorname{Cos}\gamma^2 = 1.$$

Dies ergiebt sich, wenn man die Gleichungen 1), 2), 3) in §. 301 oder die Gleichungen I, II, III in §. 302 quadrirt und addirt.

§. 304.

Man denke zwei Linien, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Die eine bilde mit den Achsen die Winkel α, β, γ, die andere die Winkel α', β', γ'; der Winkel, welchen die Linien unter sich bilden, sei φ. Es ist

$$\operatorname{Cos}\varphi = \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma'.$$

Auf der einen Linie nehme man ein Stück OA gleich 1, auf der anderen OA′ gleich 1, und es ist

$$AA'^2 = 1 + 1 - 2\cos\varphi.$$

Die Coordinaten der Punkte A und A′ sind die Cosinus der Winkel, welche von den Linien mit den Achsen gebildet werden. Daher hat man andererseits nach §. 296

$$AA'^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + (\cos\beta - \cos\beta')^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma')^2$$

oder, wenn man die Klammern löst und den vorigen Paragraph beachtet,

$$AA'^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\alpha' - 2\cos\beta\cos\beta' - 2\cos\gamma\cos\gamma'.$$

Die beiden Ausdrücke für AA'^2 liefern

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

§. 305.

Die Gleichungen einer beliebigen geraden Linie seien

$$x = az + b$$
$$y = a'z + b'$$

die Winkel, welche diese Linie mit den Coordinatenachsen bildet (in dem allgemeineren Sinn, welchen §. 27. des zweiten Theils der Geometrie feststellt), seien α, β, γ, und es ist

1) $$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2 + 1}}$$

2) $$\cos\beta = \frac{a'}{\sqrt{a^2 + a'^2 + 1}}$$

3) $$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 + 1}}$$

4) $$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Man denke durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Linie parallel mit der gegebenen, und es folgen die Gleichungen 1), 2), 3) aus §. 302. Die vierte Gleichung entspringt aus den drei ersten.

§. 306.

Die Coordinaten zweier Punkte seien x, y, z und x′, y′, z′. Die unendliche gerade Linie, welche durch diese Punkte geht, bilde mit den Achsen die Winkel α, β, γ. Es ist

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{\pm(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\beta = \frac{\pm(y-y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{\pm(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}.$$

In den Zählern sind willkürlich gleichzeitig die oberen Zeichen zu nehmen, oder gleichzeitig die unteren, die Nenner sind absolut.

Man denke durch den einen der Punkte Coordinatenachsen parallel den ursprünglichen, und es folgt das Gesetz aus den §§. 294, 295, 301 und unter Berücksichtigung der Bemerkungen zu Anfange des §. 302.

§. 307.

Wenn zwei beliebige gerade Linien mit den Achsen die Winkel α, β, γ und α', β', γ' bilden, und der Winkel, welchen sie unter sich bilden, mit φ bezeichnet wird (die Winkel im allgemeineren Sinn verstanden) so ist

$$\operatorname{Cos}\varphi = \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma'.$$

Man denke durch den Anfangspunkt der Coordinaten zwei Linien parallel den gegebenen, und es folgt das Gesetz aus §. 204.

§. 308.

1) Sind α, β, γ und α', β', γ' die Winkel, welche zwei Linien mit den Coordinatenachsen bilden, und stehen die Linien rechtwinklig auf einander, so ist

$$\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma' = 0$$

2) Die Gleichungen zweier Linien seien

$$x = az + b$$
$$y = a'z + b'$$

und

$$x = pz + q$$
$$y = p'z + q'.$$

Stehen die Linien rechtwinklig auf einander, so ist

$$ap + a'p' + 1 = 0.$$

Folgt aus 1), wenn man die Cosinus nach §. 305 ausdrückt und die Nenner beseitigt.

§. 309.

Es sei

$$\varphi_{x,\,y,\,z} = 0$$

irgend eine Gleichung zwischen den drei Veränderlichen x, y, z. Man denke z aus der Gleichung entwickelt, und es entstehe

$$z = f_{x,\,y}.$$

Beide Gleichungen bedingen dasselbe. Legt man zweien der Veränderlichen, x und y, bestimmte Werthe bei, so nimmt auch der dritte z einen bestimmten Werth an.

Man betrachte x und y als urveränderlich, und bei jedem einzelnen Werth des einen setze man für den anderen dessen sämmtliche Werthe. Für je zwei Werthe von x und y werde z bestimmt; und je drei zusammengehörige Werthe von x, y und z betrachte man als Coordinaten eines Punktes. Da x, y, z sich stetig ändern, folgen die Punkte stetig auf einander, und man erkennt bald, daß sie eine Fläche ausmachen (nicht etwa einen Körper), nämlich folgendermaßen:

Man wähle irgend einen festen Werth x′ von x, nehme y als urveränderlich, z abhängig veränderlich, und die Gleichung

$$z = f_{x',\,y}$$

liefert eine Curve, welche sich in der Ebene befindet, die in dem Endpunkt der Abscisse x′ auf der ersten Achse normal steht. Bei dem nächstfolgenden Werth x′ + dx von x wiederhole man dies Verfahren, u. s. f. und man erhält eine Reihe von unmittelbar auf einander folgenden parallelen Ebenen, und in jeder eine Curve. Die Curven in zwei benachbarten Ebenen stehen sich in allen ihren Punkten unendlich nahe, denn $f_{x',\,y}$ und $f_{x'+dx,\,y}$ unterscheiden sich bei demselben Werth von y um Unendlichkleines. Die Curven in den aufeinanderfolgenden Ebenen bilden also in der That eine Fläche.

Diese Fläche nennt man die Fläche der Gleichung

$$\varphi_{x,\,y,\,z} = 0 \text{ oder } z = f_{x,\,y}.$$

Es versteht sich von selbst, daß, statt x und y, auch x und z, oder y und z als urveränderlich betrachtet werden können, und dabei dieselbe Fläche hervorgeht.

§. 310.

Die Gleichung

$$K + Lx + My + Nz = 0$$

liefert eine Ebene.

Dies zu beweisen werden wir darthun, daß jede gerade Linie, welche zwei Punkte mit der Fläche der vorgelegten Gleichung gemein hat, ganz in dieselbe fällt.

Die Gleichungen einer geraden Linie seien

$$x = az + b$$

$$y = a'z + b'.$$

Soll diese Linie zwei Punkte x', y', z' und x'', y'', z'' mit der Fläche gemein haben, so muß sein

$$K + L(az' + b) + M(a'z' + b') + Nz' = 0$$

und $$K + L(az'' + b) + M(a'z'' + b') + Nz'' = 0$$

oder $$K + Lb + Mb' + (La + Ma' + N)z' = 0$$

und $$K + Lb + Mb' + (La + Ma' + N)z'' = 0.$$

Beide Gleichungen können zugleich nur erfüllt werden, wenn gleichzeitig

$$1)\quad K + Lb + Mb' = 0$$

$$2)\quad La + Ma' + N = 0.$$

Diese Gleichungen sind unabhängig von den Coordinaten der gedachten Punkte. Werden sie also durch die Constanten der geraden Linie in Erfüllung gebracht, so befindet sich jeder Punkt der geraden Linie in der Fläche. Die Gleichungen bestimmen nur zwei von den vier Constanten der geraden Linie, die beiden anderen bleiben willkürlich. Daher giebt es unendlich viele gerade Linien in unendlich vielen verschiedenen Richtungen, die, sobald sie zwei Punkte mit der Fläche gemein haben, ganz in ihr liegen, und deshalb ist die Fläche eine Ebene.

§. 311.

Die Gleichung der Ebene

$$K + Lx + My + Nz = 0$$

geht, wenn man z entwickelt, über in

$$z = -\frac{L}{N}x - \frac{M}{N}y - \frac{K}{N}.$$

Wir setzen

$$-\frac{L}{N} = l$$

$$-\frac{M}{N} = m$$

$$-\frac{K}{N} = n$$

und es entsteht

$$z = lx + my + k.$$

Dieser einfacheren Form werden wir uns öfter bedienen.

§. 312.

Die Gleichung einer Ebene sei

$$K + Lx + My + Nz = 0.$$

Für $x = 0$ und $y = 0$ ist $z = -\frac{K}{N}$, sind x und z gleich Null, so erhält man $y = -\frac{K}{M}$, und sind y und z gleich Null, so ist $x = -\frac{K}{L}$. Demnach sind $-\frac{K}{L}$, $-\frac{K}{M}$, $-\frac{K}{N}$ die Abscissen der Punkte, in welchen die Ebene die Achsen schneidet, und ist $K = 0$, so geht die Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

Ist eine Ebene durch die Gleichung

$$z = lx + my + k$$

gegeben, so sind $-\frac{k}{l}$, $-\frac{k}{m}$ und k die Abscissen der Punkte, in welchen die Coordinatenachsen von der Ebene geschnitten werden, und die Ebene geht durch den Anfangspunkt, wenn $k = 0$ ist.

§. 313.

Es ist ein Punkt gegeben durch die Coordinaten x', y', z', und man soll die Gleichung einer Ebene herleiten, welche durch den Punkt geht.

Die Gleichung der Ebene sei

$$z = lx + my + k.$$

Die unbekannten Coefficienten müssen der Bedingung entsprechen, daß

$$z' = lx' + my' + k$$

werde. Man eliminire k, und es entsteht

$$z - z' = l(x - x') + m(y - y')$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

§. 314.

Es ist eine Ebene

$$K + Lx + My + Nz = 0$$

gegeben, und eine gerade Linie

$$x = az + b$$
$$y = a'z + b'$$

man soll den Durchschnittspunkt beider finden.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes werden erhalten, wenn man x, y, z aus den Gleichungen der Ebene und Linie entwickelt. Es ergiebt sich

$$z = -\frac{K + Lb + Mb'}{La + Ma' + N}$$

und dann ist weiter $x = az + b$, $y = a'z + b'$.

Ist

$$La + Ma' + N = 0$$

so besteht kein Durchschnittspunkt, und die Linie ist mit der Ebene parallel, oder liegt in derselben, wenn zugleich

$$K + Lb + Mb' = 0$$

ist, nach §. 310.

§. 315.

Es sind zwei Ebenen gegeben

$$K + Lx + My + Nz = 0$$
$$K' + L'x + M'y + N'z = 0$$

und man soll ihre Durchschnittslinie bestimmen.

Die Gleichung einer Projection derselben wird erhalten, wenn man aus den Gleichungen der Ebenen einen der Veränderlichen eliminirt. Die Gleichungen der Durchschnittslinie sind daher

$$KM' - K'M + (LM' - L'M)x + (NM' - N'M)z = 0$$
$$KL' - K'L + (ML' - M'L)y + (NL' - N'L)z = 0.$$

Ist

$$1) \quad LM' - L'M = 0$$

zugleich $\quad 2) \quad NM' - N'M = 0$

so besteht keine Durchschnittslinie, und die Ebenen sind parallel. Aus 1) und 2) folgt

$$3) \quad NL' - N'L = 0.$$

Finden demnach zwei der Gleichungen 1), 2), 3) Statt, so laufen die Ebenen parallel, wenn nicht etwa sämmtliche Coefficienten der Ebenen übereinstimmen und die Ebenen zusammenfallen.

§. 316.

Die Durchschnittslinie der Ebene

$$K + Lx + My + Nz = 0$$

mit der ersten Projectionsebene ist die Linie

$$K + Lx + My = 0.$$

Ist $L = 0$ und $M = 0$, so ist die Ebene mit der ersten Projectionsebene parallel. Die Gleichung einer mit der ersten Projectionsebene parallelen Ebene ist daher

$$z = C$$

und $z = 0$ ist die Gleichung der ersten Projectionsebene selbst.

§. 317.

Es sei eine Ebene gegeben durch die Gleichung

$$1)\quad K + Lx + My + Nz = 0$$

und ein Punkt A durch seine Coordinaten x', y', z'. Wir wollen die Gleichungen der geraden Linie herleiten, welche durch den Punkt geht und normal steht auf der Ebene.

Zunächst werde angenommen, der Punkt A befinde sich in der Ebene.

Es stelle Q irgend einen Punkt der Linie vor, welche in A auf der Ebene normal steht, und seine Coordinaten seien x, y, z. Die Entfernung AQ ist stets ein Minimum. Es ist

$$AQ^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

und dies ist ein Minimum, wenn, indem man z' als Funktion von x' und y' betrachtet (also für den Augenblick den Punkt A in der Ebene als veränderlich ansieht, Q dagegen als fest)

$$2)\quad x - x' + \partial z'_{x'} (z - z') = 0$$

$$3)\quad y - y' + \partial z'_{y'} (z - z') = 0$$

Aus 1) folgt, nach x und nach y differentiirt,

$$L + N \partial z_x = 0$$

$$M + N \partial z_y = 0$$

also

$$\partial z_x = -\frac{L}{N}$$

$$\partial z_y = -\frac{M}{N}.$$

Die Gleichungen 2) und 3) gehen daher über in

$$4)\quad x - x' = \frac{L}{N}(z - z')$$

$$5)\quad y - y' = \frac{M}{N}(z - z')$$

und dies sind die Gleichungen der Normale, sobald man x, y, z als veränderlich ansieht, x′, y′, z′ als constant.

Die Coefficienten $\frac{L}{N}$ und $\frac{M}{N}$ sind unabhängig von den Coordinaten des Punktes A, von dem wir zunächst annahmen, er befinde sich in der Ebene, d. h. sie sind unabhängig von dem Durchschnittspunkt der Normale und der Ebene. Befindet sich daher der Punkt A außerhalb der Ebene, so sind die Gleichungen 4) und 5) auch die der Normale, welche durch A gehend für die Ebene besteht. Die Normale durch den Punkt außerhalb der Ebene ist parallel mit der zuerst betrachteten, hat also mit ihr gleiche Coefficienten bei z.

§. 318.

Die Gleichung einer Ebene sei

$$K + Lx + My + Nz = 0$$

eine gerade Linie, welche auf der Ebene normal steht, bilde mit den Achsen die Winkel α, β, γ, und es ist nach dem vorigen Paragraph und nach §. 305

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{\frac{L}{N}}{\sqrt{\left(\frac{L}{N}\right)^2 + \left(\frac{M}{N}\right) + 1}}$$

$$\operatorname{Cos}\beta = \frac{\frac{M}{N}}{\sqrt{\left(\frac{L}{N}\right)^2 + \left(\frac{M}{N}\right)^2 + 1}}$$

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{N}\right)^2 + \left(\frac{M}{N}\right)^2 + 1}}$$

oder, Zähler und Nenner mit N multiplicirt,

$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\beta = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

§. 319.

Und ist eine Ebene gegeben durch die Gleichung

$$1)\quad z = lx + my + k$$

so sind

$$2)\quad x - x' + l(z - z') = 0$$

$$3)\quad y - y' + m(z - z') = 0$$

die Gleichungen der Linie, welche durch den Punkt x', y', z' geht und normal steht auf der Ebene; und bildet die Normale mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ, so ist

$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{-l}{\sqrt{l^2+m^2+1}}$$

$$\mathrm{Cos}\beta = \frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2+1}}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma = \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+1}}.$$

Diese Bestimmungen ergeben sich aus den beiden vorstehenden Paragraphen und aus §. 311.

§. 320. Aufgabe.

Es sind zwei Ebenen gegeben durch ihre Gleichungen

$$K + Lx + My + Nz = 0$$

$$K' + L'x + M'y + N'z = 0$$

man soll den Winkel φ bestimmen, welchen die Ebenen bilden.

Auflösung. Der Winkel, welchen die Ebenen bilden, ist gleich dem Winkel, welcher von Linien gebildet wird, die auf ihnen normal stehen. Daher ist nach §. 318 und §. 304

$$\mathrm{Cos}\varphi = \frac{LL' + MM' + NN'}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}\ \sqrt{L'^2+M'^2+N'^2}}$$

Die Winkel, welche eine Ebene mit den Projectionsebenen bildet, sind den Winkeln gleich, die von einer auf ihr stehenden Normale mit den Achsen gebildet werden, und zwar ist der Winkel, welchen die Ebene mit der ersten Projectionsebene macht, gleich dem Winkel zwischen der Normale und der dritten Achse.

§. 321.

Stehen zwei Ebenen

$$K + Lx + My + Nz = 0$$

$$K' + L'x + M'y + N'z = 0$$

normal auf einander, so ist

$$LL' + MM' + NN' = 0.$$

Nach dem vorigen Paragraph.

§. 322.

Und sind diese Ebenen durch die Gleichungen

$$z = lx + my + k$$

$$z = l'x + m'y + k'$$

gegeben, und bezeichnet φ den Winkel, welcher von ihnen gebildet wird, so ist

$$\mathrm{Cos}\varphi = \frac{ll' + mm' + 1}{\sqrt{l^2 + m^2 + 1}\ \sqrt{l'^2 + m'^2 + 1}}.$$

Und stehen die Ebenen rechtwinklig auf einander, so ist

$$ll' + mm' + 1 = 0.$$

Neuntes Kapitel.

Von den Linien doppelter Krümmung, und von den krummen Flächen im Allgemeinen.

§. 323.

Es sei eine Fläche durch ihre Gleichung

$$z = f_{x,y}$$

gegeben, und ein Punkt derselben durch seine Coordinaten x′, y′, z′. Wir wollen die Gleichungen der Normale herleiten für diesen Punkt der Fläche.

Es werde irgend ein anderer Punkt der Normale gedacht und seine Coordinaten seien x, y, z. Die Entfernung beider Punkte muß ein Minimum sein. Das Quadrat der Entfernung ist

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Daher hat man

$$1) \quad x - x' + \partial z_{x'} (z - z') = 0$$

$$2) \quad y - y' + \partial z_{y'} (z - z') = 0$$

als die Gleichungen der Normale, für den Punkt innerhalb der Fläche, dessen Coordinaten x′, y′, z′ sind (vergl. §. 317).

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Normale beziehlich mit der ersten, zweiten und dritten Achse bildet, so ist

$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{-\partial z_{x'}}{\sqrt{\partial z_{x'}{}^2 + \partial z_{y'}{}^2 + 1}}$$

$$\mathrm{Cos}\beta = \frac{-\partial z_{y'}}{\sqrt{\partial z_{x'}{}^2 + \partial z_{y'}{}^2 + 1}}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma = \frac{1}{\sqrt{\partial z_{x'}{}^2 + \partial z_{y'}{}^2 + 1}}$$

wegen der Gleichungen 1) und 2) und nach §. 305.

§. 324.

Die Gleichung einer Fläche sei

$$z = f_{x,y}$$

ein Punkt der Fläche habe die Coordinaten x', y', z'; und wir wollen die Gleichung der Berührungsebene für diesen Punkt herleiten.

Nach §. 313 hat die Gleichung der Berührungsebene die Form

$$z - z' = l(x - x') + m(y - y')$$

und es kommt darauf an, die Coefficienten l und m zu bestimmen. Die Berührungsebene steht rechtwinklig auf der Normale. Eine Betrachtung der Gleichungen 1) 2) 3) in §. 319 mit Rücksicht auf die Gleichungen 1) und 2) des vorigen Paragraphen, lehrt daher sofort, daß $l = \partial z_{x'}$ und $m = \partial z_{y'}$ ist. Die Gleichung der Berührungsebene ist demnach

$$z - z' = \partial z_{x'}(x - x') + \partial z_{y'}(y - y')$$

§. 325.

Ist die Gleichung einer Fläche in der Form

$$F_{x,y,z} = 0$$

gegeben, so hat man, z als Funktion von x und y angesehen,

$$\partial F_z \partial z_x + \partial F_x = 0$$

$$\partial F_z \partial z_y + \partial F_y = 0$$

also

$$\partial z_x = -\frac{\partial F_x}{\partial F_z}$$

$$\partial z_y = -\frac{\partial F_y}{\partial F_z}$$

Nach den vorstehenden Paragraphen hat man daher

$$(x - x')\partial F_{z'} = (z - z')\partial F_{x'}$$

$$(y - y')\partial F_{z'} = (z - z')\partial F_{y'}$$

als Gleichungen der Normale. Und bildet diese mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ, so ist

$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{\partial F_{x'}}{\sqrt{\partial F_{x'}^2 + \partial F_{y'}^2 + \partial F_{z'}^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\beta = \frac{\partial F_{y'}}{\sqrt{\partial F_{x'}^2 + \partial F_{y'}^2 + \partial F_{z'}^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma = \frac{\partial F_{z'}}{\sqrt{\partial F_{x'}^2 + \partial F_{y'}^2 + \partial F_{z'}^2}}.$$

Weiter hat man

$$(x - x')\partial F_{x'} + (y - y')\partial F_{y'} + (z - z')\partial F_{z'} = 0$$

als Gleichung der Berührungsebene.

§. 326.

Unter einer Normalebene für eine Fläche in einem gegebenen Punkt derselben, versteht man jede Ebene, welche durch den Punkt geht und normal steht auf dessen Berührungsebene.

Die Coordinaten des Punktes seien x', y', z'. Die Gleichung der Normalebene ist dann von der Form

$$z - z' = l(x - x') + m(y - y').$$

Die Gleichung der Berührungsebene ist

$$z - z' = \partial z_{x'}(x - x') + \partial z_{y'}(y - y').$$

Als Bedingungsgleichung für die Coefficienten l und m hat man daher nach §. 322

$$l\partial z_{x'} + m\partial z_{y'} + 1 = 0.$$

Es bestehen unendlich viele Normalebenen für denselben Punkt einer Fläche, und sie schneiden sich sämmtlich in der Normale für jenen Punkt.

§. 327.

Eine Curve doppelter Krümmung ist durch die Gleichungen zweier ihrer Projectionen gegeben, z. B. $y = f_x$ und $z = \varphi_x$.

§. 328.

Eine Curve doppelter Krümmung sei gegeben durch die Gleichungen

$$y = f_x$$

$$z = \varphi_x$$

irgend ein Punkt der Curve habe die Coordinaten x' y', z', und wir wollen die Tangente für diesen Punkt der Curve bestimmen.

Man denke einen zweiten Punkt der Curve, dessen Coordinaten $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ sein mögen, und die Secante, welche durch beide Punkte geht. Die Winkel, welche die Secante mit den Coordinatenachsen bildet, seien α, β, γ. Nach §. 306 ist.

$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{\Delta x'}{\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\beta = \frac{\Delta y'}{\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma = \frac{\Delta z'}{\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}}.$$

Die Sehne wird zur Tangente, wenn $\Delta x'$ in dx' übergeht, also $\Delta y'$ in dy', $\Delta z'$ in dz'. Sind demnach α, β, γ die Winkel, welche die Tangente in dem gegebenen Punkt mit den Achsen bildet, so ist

$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{dx'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\beta = \frac{dy'}{\sqrt{dx^2 + dy'^2 + dz'^2}}$$

$$\mathrm{Cos}\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}$$

oder

$$1)\quad \mathrm{Cos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial y_{x'}{}^2 + \partial z_{x'}{}^2}}$$

$$2)\quad \mathrm{Cos}\beta = \frac{\partial y_{x'}}{\sqrt{1 + \partial y_{x'}{}^2 + \partial z_{x'}{}^2}}$$

$$3)\quad \mathrm{Cos}\gamma = \frac{\partial z_{x'}}{\sqrt{1 + \partial y_{x'}{}^2 + \partial z_{x'}{}^2}}.$$

Die Gleichungen der Tangente seien

$$y - y' = p(x - x')$$
$$z - z' = q(x - x')$$

Eine gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt geht, parallel mit der Tangente hat dann die Gleichungen

$$y = px$$
$$z = qx.$$

Hiernach ist

$$p = \frac{y}{x}.$$

Nach §. 301 ist $\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{Cos}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha}$, und dies ist nach den vorstehenden Gleichungen $\partial y_{x'}$. Eben so folgt

$$q = \frac{z}{x} = \frac{\mathrm{Cos}\gamma}{\mathrm{Cos}\alpha} = \partial z_{x'}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind demnach

$$4)\quad y - y' = \partial y_{x'}(x - x')$$

$$5)\quad z - z' = \partial z_{x'}(x - x').$$

Aus ihnen folgt weiter

$$6)\quad z - z' = \frac{\partial z_{x'}}{\partial y_{x'}}(y - y')$$

und je zwei dieser drei Gleichungen bestimmen die Tangente. Die Gleichungen zeigen, daß die Projectionen der Tangente Berührungslinien sind für die Projectionen der Curve.

§. 329.

Die Gleichungen einer Curve seien

$$y = f_x$$

$$z = \varphi_x$$

ein Bogen der Curve sei s, die Abscisse seines Endpunktes Q sei x, und es soll das Differential ds des Bogens bestimmt werden.

Man denke einen zweiten Punkt V der Curve, der Abscisse $x + \Delta x$ entsprechend und die Sehne QV. Es ist

$$QV^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Im Moment des Verschwindens von Δx geht QV in ds über, und man hat

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

oder $$ds = dx\sqrt{1 + \partial y_x{}^2 + \partial z_x{}^2}.$$

Die Wurzel ist + oder — zu nehmen, je nachdem der Bogen zunimmt oder abnimmt, während die Abscisse x wächst.

§. 330.

Bezeichnen α, β, γ die Winkel, welche die Tangente mit den

Achsen bildet, so hat man nach den beiden vorstehenden Paragraphen

$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{dx}{ds},\ \mathrm{Cos}\beta = \frac{dy}{ds},\ \mathrm{Cos}\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

§. 331.

Unter der Normalebene für einen Punkt x′ einer Curve wird die Ebene verstanden, welche auf der Tangente normal ist in jenem Punkt.

Die Gleichung der Normalebene sei

$$z - z = l(x - x') + m(y - y')$$

Auf dieser steht nach §. 319 die Linie

$$x - x' + l(z - z') = 0$$

$$y - y' + m(z - z') = 0$$

oder

$$z - z' = -\frac{1}{l}(x - x')$$

$$z - z' = -\frac{1}{m}(y - y')$$

normal. Die letzte Linie muß die Tangente sein. Daher hat man nach 5) und 6) des vorigen Paragraphen

$$-\frac{1}{l} = \partial z_{x'}$$

$$-\frac{1}{m} = \frac{\partial z_{x'}}{\partial y_{x'}}$$

also

$$l = -\frac{1}{\partial z_{x'}}$$

$$m = -\frac{\partial y_{x'}}{\partial z_{x'}}$$

Die Gleichung der Normalebene ist demnach

$$x - x' + (y - y')\partial y_{x'} + (z - z')\partial z_{x'} = 0.$$

§. 332.

Eine gerade Linie, welche durch einen Punkt x′ einer Curve geht, habe die Gleichungen

$$y - y' = p(x - x')$$

$$z - z' = q(x - x').$$

Soll diese Linie sich in der Normalebene

$$x - x' + (y - y')\partial y_{x'} + (z - z')\partial z_{x'} = 0$$

jenes Punktes befinden, so muß

$$x - x' + p(x - x')\partial y_{x'} + q(x - x')\partial z_{x'} = 0$$

sein, d. h.

$$1 + p\partial y_{x'} + q\partial z_{x'} = 0$$

wonach sich unendlich viele Werthe für die Coefficienten p und q angeben lassen.

§. 333.

Die Gleichungen einer Curve seien

$$1)\quad y = f_x$$

$$2)\quad z = \varphi_x$$

die einer zweiten

$$3)\quad y = F_x$$

$$4)\quad z = \Phi_x.$$

Sollen die Curven einen Punkt gemein haben, so müssen für denselben Werth x' von x die Gleichungen beider einerlei Werthe für y und einerlei Werthe für z gewähren, d. h. es muß

$$f_{x'} = F_{x'}$$

sein, und zugleich

$$\varphi_{x'} = \Phi_{x'}$$

Es kann dann weiter Osculation in verschiedenem Grade bei den Curven eintreten, und sie findet Statt, wenn sie in Bezug auf ihre beiden Projectionen vorhanden ist, wenn also

$$\partial f_{x'} = \partial F_{x'}$$

zugleich

$$\partial \varphi_{x'} = \partial \Phi_{x'}$$

ist. U. s. w.

Findet nämlich zwischen den Projectionen der Curven Osculation irgend eines Grades Statt, und denkt man eine dritte Curve, deren Projectionen mit denen unserer ersten Curve in geringerem Grade osculiren, so gehen die Projectionen der dritten Curve nicht zwischen denen der beiden ersten hindurch. Denkt man nun weiter die projicirenden Flächen der Curven, so befinden sich die der dritten Curve nicht zwischen denen der beiden ersten, und daher befindet sich die dritte Curve selbst nicht innerhalb des Raumes, welcher umschlossen ist von den projicirenden Flächen der ersten Curven, also auch nicht zwischen den ersten Curven selbst.

§. 334.

Zwischen Flächen und Curven, und zwischen Flächen unter sich kann ebenfalls Osculation Statt finden, und sie wird verstanden und behandelt, wie bei den früheren Gelegenheiten.

Wir beschränken uns darauf, zwei der wichtigsten Fälle in Betracht zu ziehen.

§. 335.

Es ist eine Curve gegeben durch ihre Gleichungen

$$1)\quad y = f_x$$

$$2)\quad z = \varphi_x$$

und wir wollen für einen Punkt x' derselben die Osculationsebene bestimmen.

Die Gleichung der Osculationsebene hat die Form

$$3)\quad z - z' = l(x - x') + m(y - y')$$

während $y' = f_{x'}$, $z' = \varphi_{x'}$ ist; und es kommt darauf an, die Coefficienten l und m zu ermitteln.

Die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes der Ebene zu erhalten, nimmt man x und y beliebig, und bestimmt durch die Gleichung das dazu gehörige z. Hier kommen die Punkte der Ebene in Betracht, welche den Punkten der Curve zunächst liegen, die die benachbarten sind zu dem Punkt x', y', z', den Curve und Ebene gemein haben. Wir nehmen deshalb die x und y der Ebene übereinstimmend mit den x und y der Linie, d. h. wir denken die x in beiden gleich, und das y der Ebene gleich f_x. Unter diesem Gesichtspunkt müssen nun die Ableitungen von z, aus Linie und Ebene, so weit es sich thun läßt, übereinstimmen. Aus 3) folgt

$$4)\quad \partial z_{x'} = l + m\partial y_{x'}$$

$$5)\quad \partial^2 z_{x'} = m\partial^2 y_{x'}$$

und man hat nur statt z noch φ_x zu denken, um, während y bereits f_x ist, die Bestimmungsgleichungen für l und m zu erhalten.

Die Ebene ist einfache Berührungsebene, wenn ihre Coefficienten l und m bloß der Gleichung 4) Genüge leisten, und das kann durch unendlich viele verschiedenen Werthe von l und m geschehen; die Ebene ist Osculationsebene vom zweiten Grade, wenn ihre Coefficienten l und m gleichzeitig den Gleichungen 4) und 5) entsprechen. Es besteht nur eine Osculationsebene vom zweiten Grade, und diese wird schlechthin Osculationsebene genannt.

Aus 4) und 5) folgt

$$m = \frac{\partial^2 z_{x'}}{\partial^2 y_{x'}}$$

$$l = \frac{\partial z_{x'} \partial^2 y_{x'} - \partial y_{x'} \partial^2 z_{x'}}{\partial^2 y_{x'}}$$

und setzt man diese Werthe in 3), so entsteht

$$6)\ (z-z')\partial^2 y_{x'} = (x-x')(\partial z_{x'}\partial^2 y_{x'} - \partial y_{x'}\partial^2 z_{x'}) + (y-y')\partial^2 z_{x'}$$

als Gleichung der Osculationsebene.

Die Gleichungen der Tangente für den Punkt x' der Curve sind

$$y - y' = \partial y_{x'}(x - x')$$
$$z - z' = \partial z_{x'}(x - x').$$

Soll die Tangente in der Ebene

$$z - z' = l(x - x') + m(y - y')$$

liegen, so muß

$$\partial z_{x'}(x - x') = l(x - x') + m\partial y_{x'}(x - x')$$

sein, oder

$$\partial z_{x'} = l + m\partial y_{x'}$$

Dies ist die Gleichung 4), und daraus erhellet, daß die Tangente stets in der Berührungsebene sich befindet.

Sind x, y, z Funktionen eines neuen Urveränderlichen, so gelangt man leicht in folgender Weise zur Osculationsebene.

Die Gleichung der Osculationsebene sei

$$A(x - x') + B(y - y') + z - z = 0$$

und es folgt

$$Adx + Bdy + dz = 0$$
$$Ad^2x + Bd^2y + d^2z = 0$$

Statt der Differentiale hier denke man die der Curve, und entwickele A und B. Es entsteht

$$A = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dxd^2y - dyd^2x}$$

$$B = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Mithin ist die Gleichung der Osculationsebene

7) $(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(x - x') + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(y - y')$
$+ (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(z - z') = 0.$

Und nimmt man wiederum x als unveränderlich, also $d^2x = 0$, so geht diese Gleichung über in die 6).

§. 336.

Die Gleichung der Kugel, deren Radius r ist, und deren Mittelpunkt die Coordinaten a, b, c hat, ist nach §. 296

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

§. 337.

Man stelle sich eine Curve von doppelter Krümmung vor. Durch jeden beliebigen Punkt Q der Curve und seine beiden benachbarten Punkte läßt sich eine Ebene denken, und diese Ebene ist die Osculationsebene des Punktes Q. In der Osculationsebene denke man den Osculationskreis für den Punkt Q des in der Ebene befindlichen Elements der Curve. Dieser Osculationskreis ist der Krümmungskreis, sein Radius der Krümmungsradius des Punktes Q der Curve.

Man denke eine Kugel, welche an einem Punkt der Curve im zweiten Grade osculirt, und deren Mittelpunkt in der Osculationsebene des Punktes sich befindet. Die Kugel schneidet die Osculationsebene in einem größten Kreise, und dieser ist der Krümmungskreis jenes Punktes. Hiernach werden wir die Bestimmung des Krümmungskreises durchführen.

Die Gleichung der Osculationsebene werde kürzer ausgedrückt durch

$$X(x - x') + Y(y - y') + Z(z - z') = 0$$

wir haben also

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y$$
$$Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z$$
$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x$$

gesetzt.

Die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises seien a, b, c, der Radius sei r. Und diese Bestimmungsstücke sind zu entnehmen aus den Gleichungen

1) $(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = r^2$

2) $(a - x)\,dx + (b - y)\,dy + (c - z)\,dz = 0$

3) $dx^2 + dy^2 + dz^2 - (a - x)d^2x - (a - y)d^2y$
$- (c - z)\,d^2z = 0$

4) $X(a-x)+Y(b-y)+Z(c-z)=0$

wenn man nämlich unter x, y, z die Coordinaten des Punktes der Curve versteht, dessen Krümmungskreis wir zu bestimmen die Absicht haben, und unter dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z die Differentiale dieser Coordinaten.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$x-x'+\partial y_{x'}(y-y')+\partial z_{x'}(z-z')=0$$

oder α) $(x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0.$

Wegen der Gleichung 2) liegt daher der Mittelpunkt des Krümmungskreises in der Normalebene des Punktes der Curve.

Die Normalebene des nächsten Punktes $x'+dx'$ ist

$$(x-x'-dx')(dx'+d^2x')+(y-y'-dy')(dy'+d^2y')$$
$$+(z-z'-dz')(dz'+d^2z')=0$$

oder mit Bezug auf α)

$$dx'^2+dy'^2+dz'^2-(x-x')d^2x'-(y-y')d^2y'$$
$$-(z-z')d^2z'=0.$$

Deshalb befindet sich wegen der Gleichung 3) der Krümmungsmittelpunkt irgend eines Punktes der Curve auch in der Normalebene des ihm folgenden Punktes.

Wir schreiten nunmehr zur Entwickelung von a, b, c und r.

Aus 2) und 3) eliminiren wir $a-x$, und setzen wegen §. 329 ds^2 statt $dx^2+dy^2+dz^2$. Es entsteht

$$dx\,ds^2+(b-y)(dy\,d^2x-dx\,d^2y)+(c-z)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)=0$$

oder

5) $(b-y)Z-(c-z)Y=dx\,ds^2$

ähnlich folgt

6) $(c-z)X-(a-x)Z=dy\,ds^2$

7) $(a-x)Y-(b-y)X=dz\,ds^2.$

Wir eliminiren weiter $a-x$ u. s. f. aus 2) und 4), und erhalten

8) $(Xdy-Ydx)(b-y)-(Zdx-Xdz)(c-z)=0$

9) $(Ydz-Zdy)(c-z)-(Xdy-Ydx)(a-x)=0$

10) $(Zdx-Xdz)(a-x)-(Ydz-Zdy)(b-y)=0.$

Aus 5) und 8) werde $b-y$ eliminirt. Das liefert

11) $[(Zdx-Xdz)Z-(Xdy-Ydx)Y](c-z)$
$$=(Xdy-Ydx)dx\,ds^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
(Zdx - Xdz)Z - (Xdy - Ydx)Y &= (Y^2 + Z^2)\,dx - X(Zdz + Ydy) \\
&= (Y^2 + Z^2)\,dx - Xdx\,(dz\,dy^2 - dy\,d^2z) \\
&= (X^2 + Y^2 + Z^2)\,dx
\end{aligned}$$

und wenn wir diesen Werth in 11) substituiren, folgt

$$12)\quad c - z = \frac{ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}(Xdy - Ydx).$$

Eben so ergiebt sich

$$13)\quad b - y = \frac{ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}(Zdx - Xdy)$$

$$14)\quad a - x = \frac{ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}(Ydz - Zdy)$$

und aus 1), wenn wir diese Werthe substituiren,

$$15)\quad r = \frac{ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{(Xdy - Ydx)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Ydz - Zdy)^2}$$

Hierdurch sind der Mittelpunkt und der Radius des Krümmungskreises bestimmt. Die Ausdrücke lassen sich reduciren und auf Formen bringen, welche namentlich in der höheren Mechanik von Wichtigkeit sind. Wir lassen die Reduction folgen.

Es ist

$$\begin{aligned}
Ydz - Zdy &= (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\,dz - (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,dy \\
&= (dy^2 + dz^2)\,d^2x - dx\,(dy\,d^2y + dz\,d^2z) \\
&= ds^2\,d^2x - dx\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
16)\quad Ydz - Zdy &= ds^2\,d^2x - dx\,ds\,d^2s \\
&= ds^3\,\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}
\end{aligned}$$

oder

$$17)\quad Ydz - Zdy = ds^3\,d\left(\frac{dx}{ds}\right).$$

Eben so ist

$$18)\quad Zdx - Xdz = ds^3\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

$$19)\quad Xdy - Ydx = ds^3\,d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Die Gleichungen 17), 18), 19) quadrirt und addirt, liefern

$$20)\quad (Ydz - Zdy)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Xdy - Ydx)^2$$
$$= dz^6 \left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right].$$

Nach 16) ist andererseits

$$Ydz - Zdy = ds^2 d^2x - dx\, ds\, ds^2$$

und eben so

$$Zdx - Xdz = ds^2 d^2y - dy\, ds\, d^2s$$
$$Xdy - Ydx = ds^2 d^2z - dz\, ds\, d^2s.$$

Wir quadriren und addiren diese Gleichungen. Dadurch entsteht rechts

$$ds^4[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] + ds^2 (d^2s)^2 ds^2$$
$$- 2ds^3 d^2s (dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)$$

oder

$$ds^4[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] + ds^4 (d^2s)^2 - 2ds^4 (d^2s)^2$$

so daß man auch hat

$$21)\quad (Ydz - Zdy)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Xdy - Ydx)^2$$
$$= ds^4 [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]$$

aus 20) und 21) folgt

$$22)\quad (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2$$
$$= ds^2 \left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right].$$

Wir quadriren ferner die Gleichungen

$$X = dy\, d^2z - dz\, d^2y$$
$$Y = dz\, d^2x - dx\, d^2z$$
$$Z = dx\, d^2y - dy\, d^2x$$

und addiren. Das liefert

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2 [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]$$
$$- dx^2 (d^2x)^2 - dy^2 (d^2y)^2 - dz^2 (d^2z)^2$$
$$- 2dy\, dz\, d^2y\, d^2z - 2dx\, dz\, d^2x\, d^2z - 2dx\, dy\, d^2x\, d^2y$$
$$= ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)^2$$
$$= ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (ds\, d^2s)^2$$

$$23)\quad X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2 [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2].$$

Die Gleichungen 12), 13), 14), 15) erhalten durch 17), 18), 19), 21), 23) nachstehende Formen

$$24)\quad a - x = \frac{ds^3\, d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$

$$25)\quad b - y = \frac{ds^3\, d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$

$$26)\quad c - z = \frac{ds^3\, d\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$

$$27)\quad r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

welche, wenn wir 22) anwenden, übergehen in

$$28)\quad a - x = \frac{ds\, d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

$$29)\quad b - y = \frac{ds\, d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

$$30)\quad c - z = \frac{ds\, d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

$$31)\quad r = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}.$$

Aus 31) folgt

$$32)\quad \frac{ds}{r} = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

und dies ist der Contingenzwinkel unserer Curve doppelter Krümmung.

Die Formeln 28), 29), 30) gehen weiter vermittelst 32) über in

$$33)\quad a - x = \frac{r^2}{ds}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

$$34)\quad b - y = \frac{r^2}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

$$35)\quad c - z = \frac{r^2}{ds} d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Und bezeichnen λ, μ, ν die Winkel, welche der Krümmungsradius mit den Achsen bildet, so ist

$$36)\quad \operatorname{Cos}\lambda = \frac{a - x}{r} = \frac{r}{ds} d\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

$$37)\quad \operatorname{Cos}\mu = \frac{b - y}{r} = \frac{r}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

$$38)\quad \operatorname{Cos}\nu = \frac{c - z}{r} = \frac{r}{ds} d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Man stelle sich die Tangente an dem Punkt der Curve vor, dessen Coordinaten x, y, z sind, und bezeichne die Winkel, welche die Tangente mit den Achsen bildet, durch α, β, γ. Es ist

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\operatorname{Cos}\beta = \frac{dy}{ds}$$

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Durch diese Gleichungen lassen sich die oberen Formeln noch ferner umgestalten. So z. B. hat man aus 32)

$$\frac{ds}{r} = \sqrt{(d\operatorname{Cos}\alpha)^2 + (d\operatorname{Cos}\beta)^2 + (d\operatorname{Cos}\gamma)^2}.$$

§. 338.

Die Gleichungen einer Curve seien

$$y = f_x$$

$$z = \varphi_x$$

man soll einen Bogen s der Curve bestimmen, dessen Endpunkte den Abscissen x' und x'' entsprechen.

Nach §. 329 ist sofort

$$s = \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{1 + \partial y_x{}^2 + \partial z_x{}^2}.$$

§. 339. Aufgabe.

Es ist, Fig. 69, eine Curve durch ihre Gleichung $y = f_x$ gegeben, in ihr ein Punkt Q durch seine Abscisse a, ein zweiter Punkt V durch seine Abscisse x. Man stelle sich vor, die Figur werde um die Abscissenachse OX gedreht; dabei beschreibt die Figur BQVD einen Umdrehungskörper: Man soll den Inhalt dieses Umdrehungskörpers bestimmen.

Auflösung. Der Inhalt des Umdrehungskörpers sei F_x. Man lasse x wachsen um $dx = DG$, so wächst f_x um $df_x = HS$, und F_x um dF_x, welches gleich dem Körper ist, den die Figur DGSV während der Umdrehung beschreibt. Der letzte Körper ist ein abgekürzter Kegel, weil der unendlich kleine Bogen VS mit der Sehne VS zusammenfällt. Daher hat man

$$dF_x = \tfrac{1}{3}\pi dx\,[f_x{}^2 + f_x(f_x + df_x) + (f_x + df_x)^2]$$

oder, weil df_x gegen f_x verschwindet,

$$dF_x = \pi f_x{}^2\,dx$$

folglich

$$F_x = \pi\int_a^x f_x{}^2\,dx.$$

§. 340. Aufgabe.

Es sei, Fig. 69, eine Curve durch ihre Gleichung $y = f_x$ gegeben, in ihr ein Punkt Q durch seine Abscisse a, ein zweiter Punkt V durch seine Abscisse x. Man stelle sich vor, die Figur werde um die Abscissenachse OX gedreht, und man soll die Umdrehungsfläche, welche der Bogen QV beschreibt, berechnen.

Auflösung. Es sei φ_x der Inhalt der Umdrehungsfläche. Man lasse x um dx wachsen, und es folgt wie vorher, daß die Fläche, welche VS beschreibt, der Mantel eines abgekürzten Kegels ist, daß also

$$d\varphi_x = \pi\,(f_x + f_x + dx)\sqrt{dx^2 + df_x{}^2}$$

ist, oder, weil dx gegen f_x verschwindet,

$$d\varphi_x = 2\pi f_x\sqrt{1 + \partial f_x{}^2}\,dx$$

und

$$\varphi_x = 2\pi\int_a^x f_x\sqrt{1 + \partial f_x{}^2}\,dx.$$

§. 341.

Ist die Erzeugungslinie $y = f_x$ eine geschlossene Curve, welche zur einen Seite der Achse sich befindet, so geht sie hervor, indem zwei Reihen von Werthen für y bestehen für die

selbe Reihe der Werthe von x, und der Umdrehungskörper wird erhalten in der Differenz der Körper, die durch die eine, und durch die andere Reihe der y entstehen, die Umdrehungsfläche in der Summe der Flächen, welche die beiden Reihen der y gewähren.

§. 342. Aufgabe.

Es ist die Curve, Fig. 72, durch ihre Polargleichung $y = f_x$ gegeben; und man soll den Inhalt des Körpers bestimmen, welchen der Ausschnitt APQ beschreibt, während die Curve um die feste Linie NP gedreht wird.

Auflösung. Der Inhalt des Körpers sei F_x. Man lasse x wachsen um dx, und der Körper, welchen das unendlich kleine Dreieck QPV während der Umdrehung beschreibt, ist gleich dF_x. Nach §. 205 des zweiten Theils der Geometrie hat man

$$dF_x = \tfrac{2}{3}\pi[y \operatorname{Sin} x + (y+dy)\operatorname{Sin}(x+dx)]\cdot\tfrac{1}{2}PV\cdot SQ$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi[y \operatorname{Sin} x + (y+dy)\operatorname{Sin}(x+dx)]\cdot\tfrac{1}{2}(y+dy)\cdot y\,dx$$

oder, weil die unendlich kleinen Summanden dy und dx gegen die endlichen Summanden y und x verschwinden,

$$dF_x = \tfrac{2}{3}\pi y^3 \operatorname{Sin} x\cdot dx$$

folglich

$$F_x = \tfrac{2}{3}\pi\int_a^x f_x{}^3 \operatorname{Sin} x\cdot dx.$$

§. 343. Aufgabe.

Es ist, Fig. 72, eine Curve durch ihre Polargleichung $y = f_x$ gegeben, man soll die Fläche bestimmen, welche der Bogen AQ bei einer Umdrehung der Curve um die Linie NP beschreibt.

Auflösung. Die Fläche sei φ_x. Man lasse x um dx wachsen, und es ist $d\varphi_x$ die Fläche, welche QV beschreibt. Das unendlich kleine QV ist als gerade zu betrachten, und man hat

$$d\varphi_x = \pi[y \operatorname{Cos} x + (y+dy)\operatorname{Cos}(x+dx)]\sqrt{y^2\,dx^2 + dy^2}$$

oder

$$d\varphi_x = 2\pi y \operatorname{Sin} x\sqrt{y^2 + \partial y_x{}^2}\,dx$$

also

$$\varphi_x = 2\pi\int_a^x f_x \operatorname{Sin} x\sqrt{f_x{}^2 + \partial f_x{}^2}\cdot dx.$$

§. 344.

Es sei eine Fläche gegeben durch ihre Gleichung

$$z = f_{x,\,y}.$$

Man denke zwei Ebenen, normal stehend auf der ersten Achse, die eine in der Entfernung a, die andere in der Entfernung x vom Anfangspunkt; und andererseits zwei Ebenen normal stehend auf der zweiten Achse, in den Entfernungen b und y vom Anfangspunkt. Die vier Ebenen liefern einen prismatischen Raum, aus diesem wird durch die erste Projectionsebene und durch die Fläche ein Körper geschnitten, und wir wollen den Inhalt desselben bestimmen.

Der Inhalt des Körpers sei v. Man lasse x wachsen um dx. Es wächst v um dv und man hat

$$dv = dx \int_b^y z dy$$

und dann weiter

$$v = \int_a^x dx \int_b^y z dy.$$

Werden statt der beiden auf der zweiten Achse normal stehenden Ebenen cylindrische Flächen gedacht, deren Seiten normal stehen auf der ersten Projectionsebene und deren ersten Schnitte durch die Gleichungen $y = \varphi_x$ und $y = \psi_x$ gegeben sind, so ist in gleicher Weise

$$v = \int_a^x dx \int_{\varphi x}^{\psi x} z dy.$$

§. 345.

Es sei, wie zu Anfang des vorigen Paragraphen, und wir wollen den Theil der Fläche berechnen, welcher innerhalb des prismatischen Raumes liegt, und dessen erste Projection das Rechteck ist, welches $x - a$ und $y - b$ zu Seiten hat.

Der Inhalt dieses Flächentheils sei v. Man lasse x wachsen um dx, y um dy. Der Flächentheil, dessen erste Projection das Rechteck dx.dy ist, fällt mit der Berührungsebene des Punktes x, y zusammen. Der Inhalt dx.dy wird erhalten, wenn man den Inhalt des Flächentheils mit dem Cosinus des Winkels multiplizirt, welchen die Berührungsebene mit der ersten Projectionsebene bildet, und dieser ist gleich dem Winkel, welchen die Normale mit der dritten Achse macht. Der Cosinus dieses Winkels ist

$$\frac{1}{\sqrt{\partial z_x{}^2 + \partial z_y{}^2 + 1}}$$

Mithin ist jener Flächentheil gleich

$$dx\,dy\sqrt{\partial z_x{}^2 + \partial z_y{}^2 + 1}.$$

Hiernach hat man, unter dv das Differential der Fläche v verstanden, welches durch alleiniges Wachsthum von x um dx hervorgeht

$$dv = dx\int_b^y dy\sqrt{\partial z_x{}^2 + \partial z_y{}^2 + 1}$$

und $$v = \int_a^x dx\int_b^y dy\sqrt{\partial z_x{}^2 + \partial z_y{}^2 + 1}.$$

Und denkt man statt der auf der zweiten Achse normal stehenden Ebenen die Cylinderflächen, so ist

$$v = \int_a^x dx\int_{\varphi x}^{\psi x} dy\sqrt{\partial z_x{}^2 + \partial z_y{}^2 + 1}.$$

§. 346.

I. Es drehe sich, Fig. 30, die Parabel $y = \sqrt{px}$ um ihre Achse; man soll den Inhalt des Körpers finden, welchen die Figur OVA bei dieser Drehung beschreibt, und den Inhalt der Fläche, welche der Bogen OA erzeugt.

Der Inhalt des Körpers ist nach §. 339

$$\int_0^x px\,dx = \tfrac{1}{2}\pi px^2 = \tfrac{1}{2}\pi y^2 x.$$

Der Körper ist also gleich der Hälfte des Cylinders, welcher den Kreis zum Radius y zur Grundebene, und die Abscisse x zur Höhe hat.

Die krumme Fläche, welche der Bogen OA beschreibt, drückt sich nach §. 340 aus durch

$$2\pi\int_0^x \sqrt{px}\sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\frac{p}{x}}\,dx$$

und das ist

$$\tfrac{1}{6}\pi\left(\sqrt{p(4x+p)^3} - p^2\right).$$

II. Es sei, Fig. 40, eine Ellipse gegeben durch ihre Mittelpunktsgleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Die Ellipse werde um die große Achse gedreht; und man soll

den Inhalt des Körpers berechnen, welchen die Figur MVPC bei dieser Umdrehung erzeugt, so wie den Inhalt der Fläche, welche der Bogen CP beschreibt.

Der Inhalt des Körpers ist

$$\pi\int_0^x \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx$$

welches gleich ist

$$\pi\frac{b^2}{a^2}x(a^2 - \tfrac{1}{3}x^2).$$

Für $x = a$ giebt dieser Ausdruck $\frac{2}{3}\pi ab^2$, als Inhalt des Körpers, welchen die Viertelellipse erzeugt. Der Inhalt des Körpers, welcher hervorgeht, wenn die vollständige Ellipse sich um ihre große Achse dreht, ist daher $\frac{4}{3}\pi ab^2$; und hieraus ergiebt sich weiter, indem man $b = a$ setzt, der Inhalt der Kugel zum Radius a gleich $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Der Inhalt der Fläche, welche der Bogen CP beschreibt, drückt sich, da $\partial\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ist, aus durch

$$2\pi\frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\frac{b}{a^2}\int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx.$$

Es ist

$$\int\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{2} + \frac{a^4}{2\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - b^2}$$

und da dieser Ausdruck für $x = 0$ verschwindet, so ist der Inhalt der gedachten Fläche gleich

$$\pi\frac{b}{a^2}\left[x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} + \frac{a^4}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - b^2}\right].$$

Für $x = a$ entsteht hieraus der Inhalt der Fläche, welche der Bogen CB hervorbringt, gleich

$$\pi b\left[b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right]$$

folglich ist die Fläche, welche durch Umdrehung der Ellipse um die große Achse sich erzeugt, gleich

$$2\pi b\left[b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right].$$

Der letzte Ausdruck liefert weiter die Oberfläche der Kugel zum Radius a, wenn man $b = a$ setzt. Für

$$\frac{\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

erhält man, b veränderlich ansehend, den Werth $\frac{1}{a}$. Und dann entsteht $4\pi a^2$ für die Kugelfläche.

Man betrachte AB als die kleine Achse der Ellipse, und nehme an, die Drehung finde um diese Statt. Dann ist $y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$ die Gleichung der Ellipse, der Inhalt der körperlichen Zone ist gleich

$$\pi \frac{a^2}{b^2} x\left(b^2 - \tfrac{1}{3}x^2\right)$$

also der Inhalt des diesmal entstehenden Körpers gleich $\frac{4}{3}\pi a^2 b$, woraus wiederum der Inhalt der Kugel sich entnehmen läßt.

Für den Inhalt der Zone erhält man, da

$$\partial \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2} = \frac{a}{b}\frac{-x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

ist, das Integral

$$2\pi \frac{a}{b^2}\int_0^x \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}\, dx$$

und es ist

$$\int \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}\, dx$$

$$= \frac{x\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}}{2} + \frac{b^4}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln\left(x\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}\right)$$

Für $x = 0$ verschwindet rechts das erste Glied, und der Logarithmus geht über in $\ln b^2$. Daher ist der Inhalt der Zone gleich

$$\pi\frac{a}{b^2}\Big[x\sqrt{b^4+(a^2-b^2)x^2}$$

$$+\frac{b^4}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{x\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{b^4+(a^2-b^2)x^2}}{b^2}\Big].$$

Man setze $x = b$ und nehme das Entstehende doppelt, und es ergiebt sich die Oberfläche des jetzt betrachteten Körpers gleich

$$2\pi a\left[a+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right]$$

woraus sich noch einmal die Oberfläche der Kugel entnehmen läßt.

III. Legen wir für die Hyperbel die Mittelpunktsgleichung

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

zu Grunde, so wird der Inhalt des hyperbolischen Umdrehungskörpers gegeben durch

$$\pi\int_a^x\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)dx$$

welches gleich ist

$$\pi\frac{b^2}{a^2}[\tfrac{1}{3}x^3-a^2x+\tfrac{2}{3}a^3]$$

oder gleich $$\tfrac{1}{3}\pi\frac{b^2}{a^2}(x-a)^2(x+2a).$$

Die krumme Oberfläche des hyperbolischen Umdrehungskörpers drückt sich aus durch

$$2\pi\int_a^x\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{x^2-a^2}}\,dx$$

$$=2\pi\frac{b}{a^2}\int_a^x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}\,dx$$

und es ist

$$\int\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}\,dx$$

$$=\frac{x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{2}-\frac{a^4}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln[x\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}].$$

Für x = a entsteht hieraus:

$$\frac{a^2b}{2} - \frac{a^4}{2\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left(a\sqrt{a^2+b^2}+ab\right)$$

folglich ist die Fläche gleich

$$\pi b\Bigg[-b + \frac{x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a^2}$$

$$-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \frac{x\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a(b+\sqrt{a^2+b^2})}\Bigg].$$

IV. Es drehe sich, Fig. 86, die conchoidische Fläche CODQ um die Achse OX; man soll den Inhalt des Körpers finden, der beschrieben wird.

Auflösung. Der Inhalt des Körpers ist

$$\pi\int_0^x y^2\,dx.$$

Die Gleichung der Conchoide ist nicht geeignet, y als Funktion von x herzustellen. Deshalb führen wir x als Funktion von y ein und erhalten für den Inhalt

$$\pi\int_a^y y^2\,\partial x_y\,dy$$

oder wegen §. 281 5)

$$-\pi\int_a^y \frac{a^2b+y^3}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy$$

$$= -\pi a^2 b\int_a^y \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} - \pi\int_a^y \frac{y^3}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy.$$

Nun ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \arcsin\frac{y}{a}$$

und

$$\int \frac{y^3}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy = \tfrac{1}{2}\int \frac{y^2\,\partial(y^2)}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy$$

$$= -\tfrac{1}{3}(2a^2+y^2)\sqrt{a^2-y^2}.$$

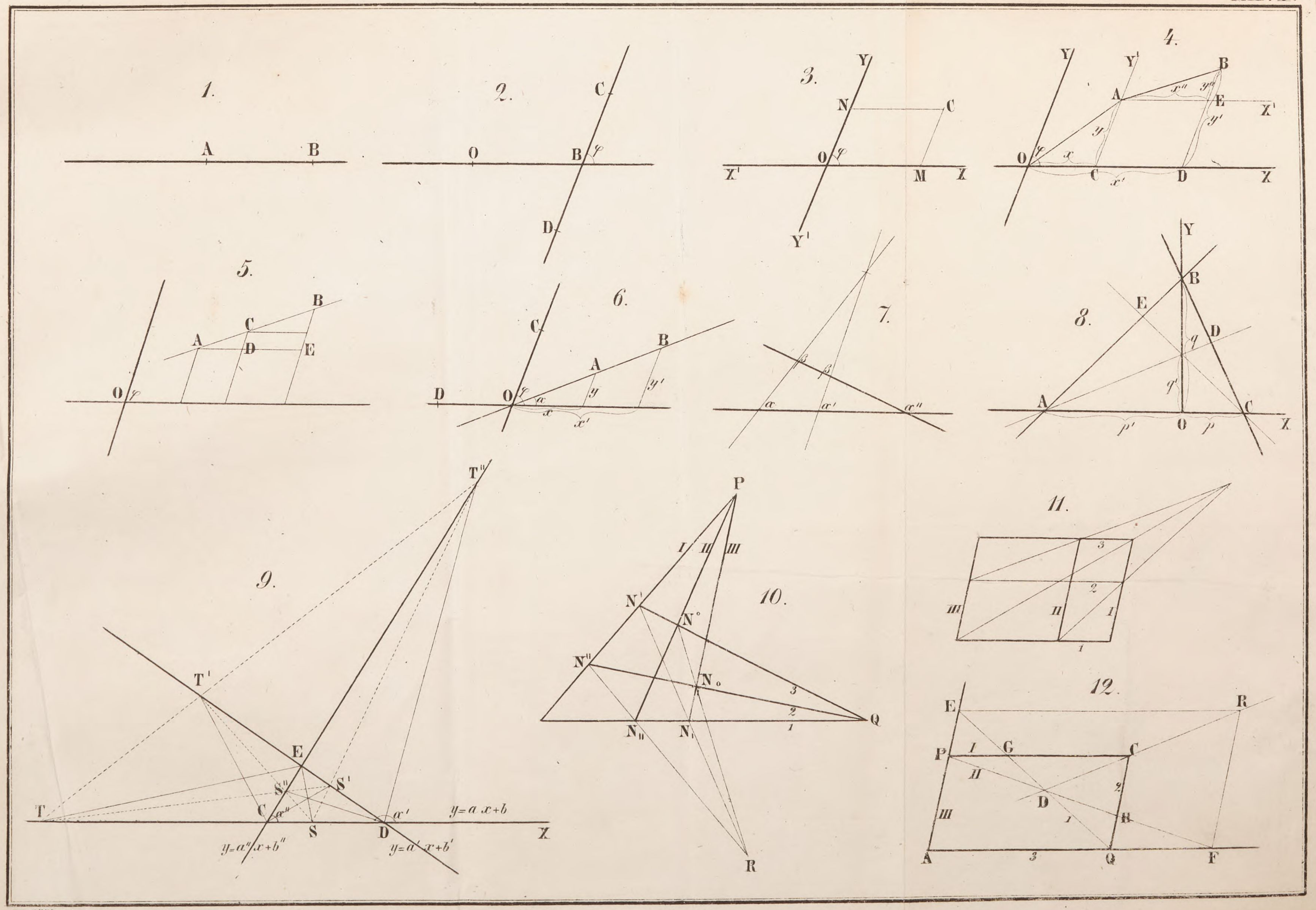
Der letzte Ausdruck verschwindet für y = a; aber $\arcsin\frac{y}{a}$ liefert $\frac{1}{2}\pi$ für y = a. Daher hat man den Inhalt des Körpers gleich

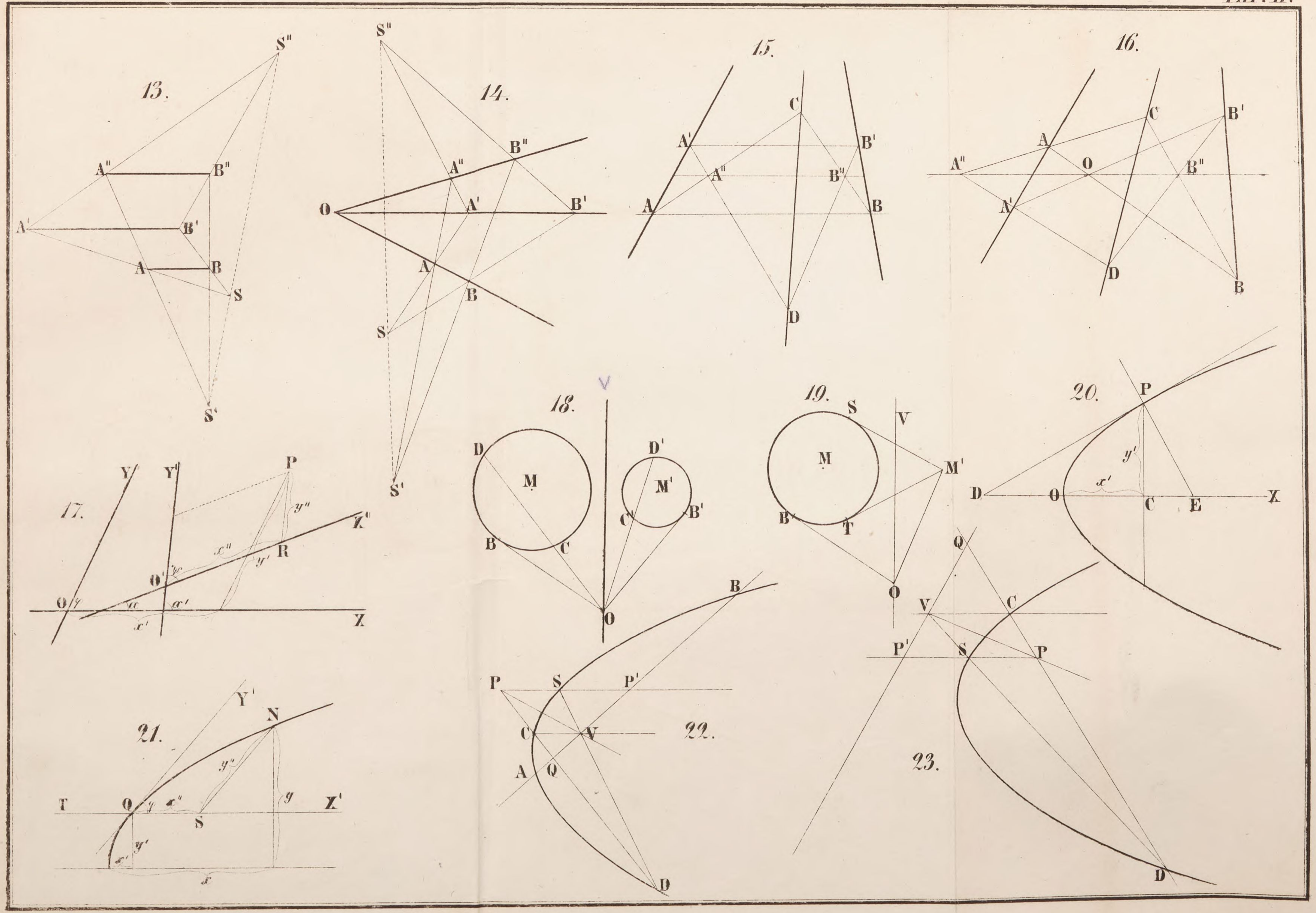
$$\pi\left[\frac{2a^2+y^2}{3}\sqrt{a^2-y^2}+a^2b\left(\tfrac{1}{2}\pi-\arcsin\frac{y}{a}\right)\right]$$

oder gleich

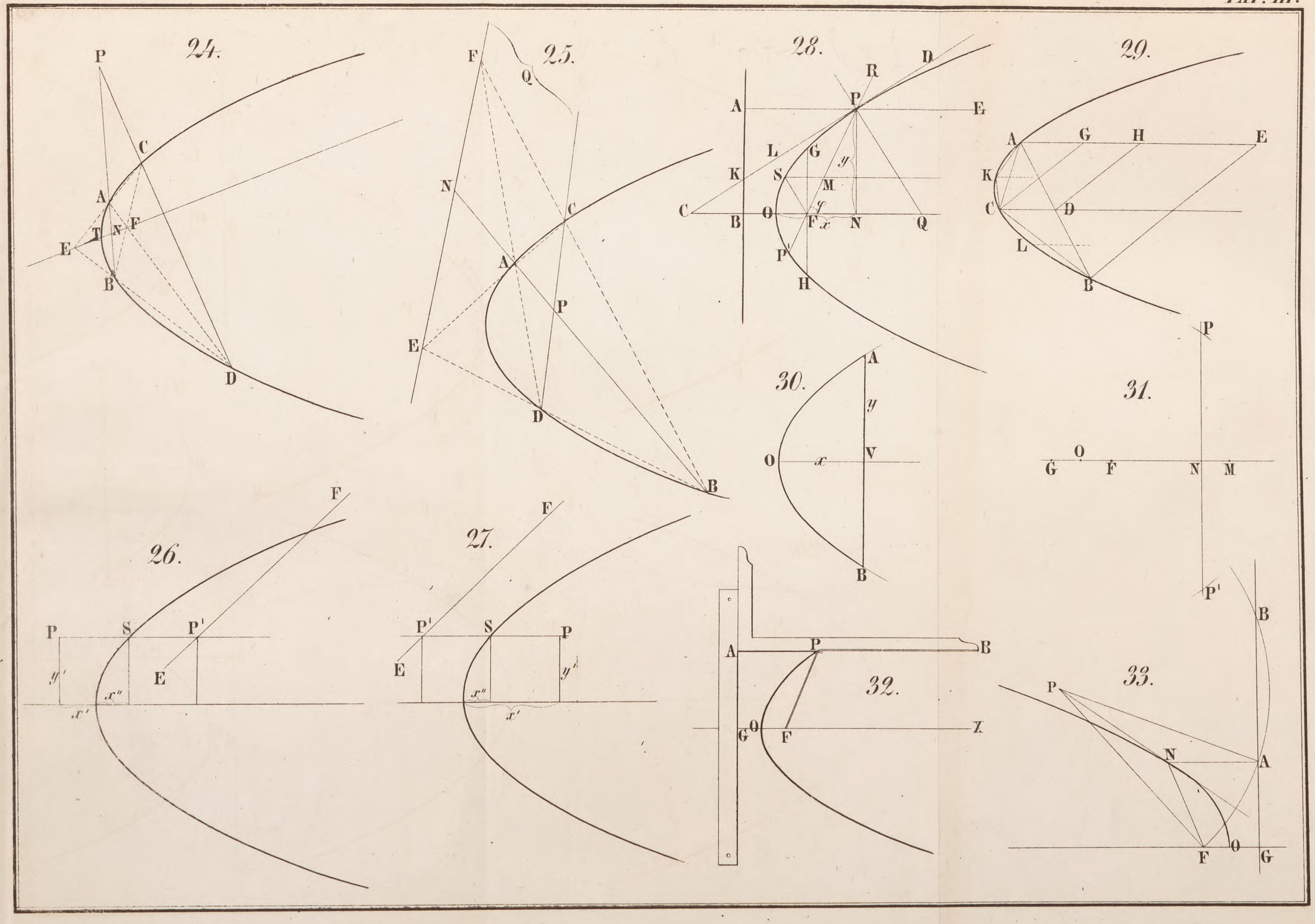
$$\pi\left[\frac{2a^2+y^2}{3}\sqrt{a^2-y^2}+a^2b\arccos\frac{y}{a}\right].$$

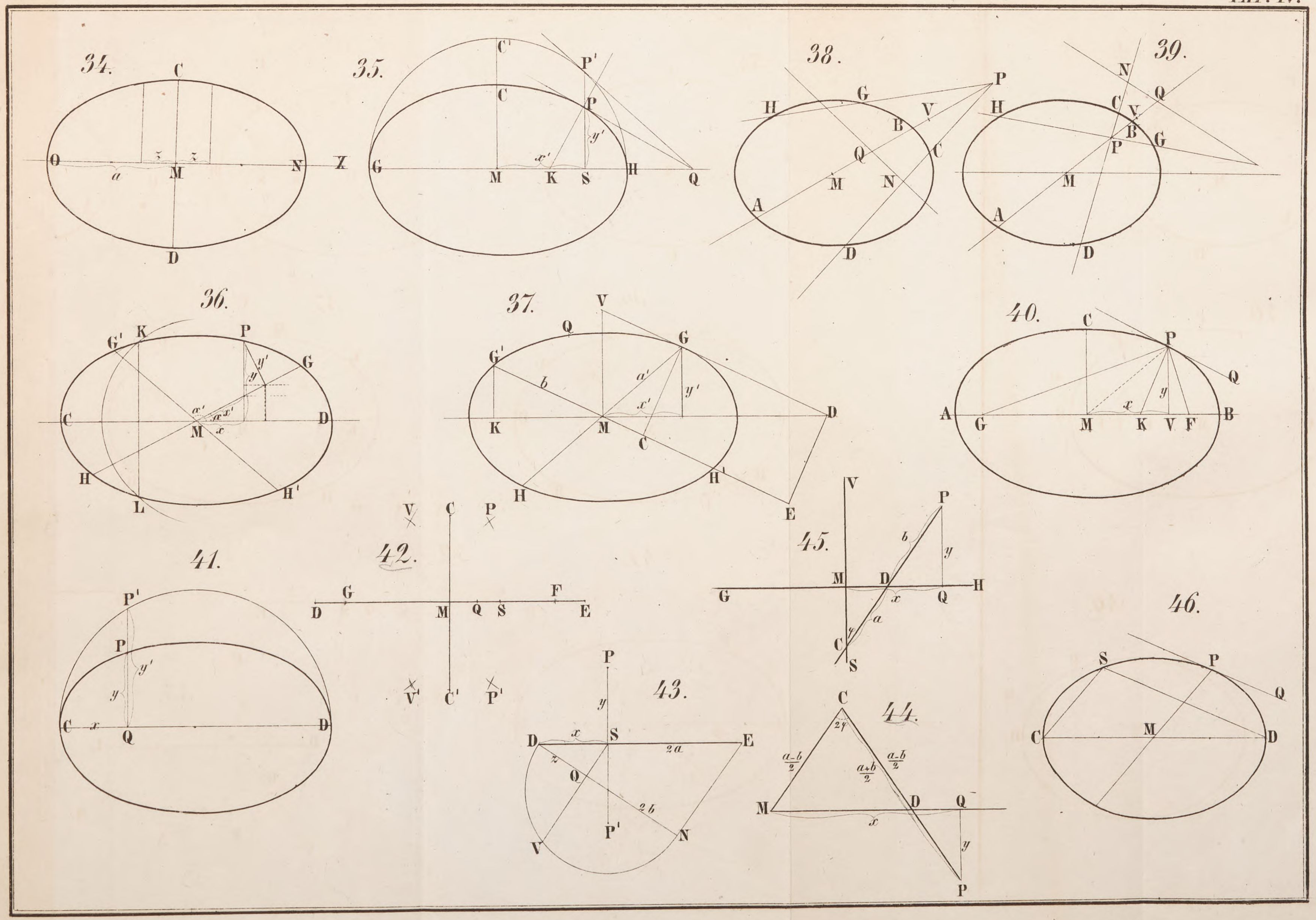
Berlin, gedruckt bei J. F Starcke.

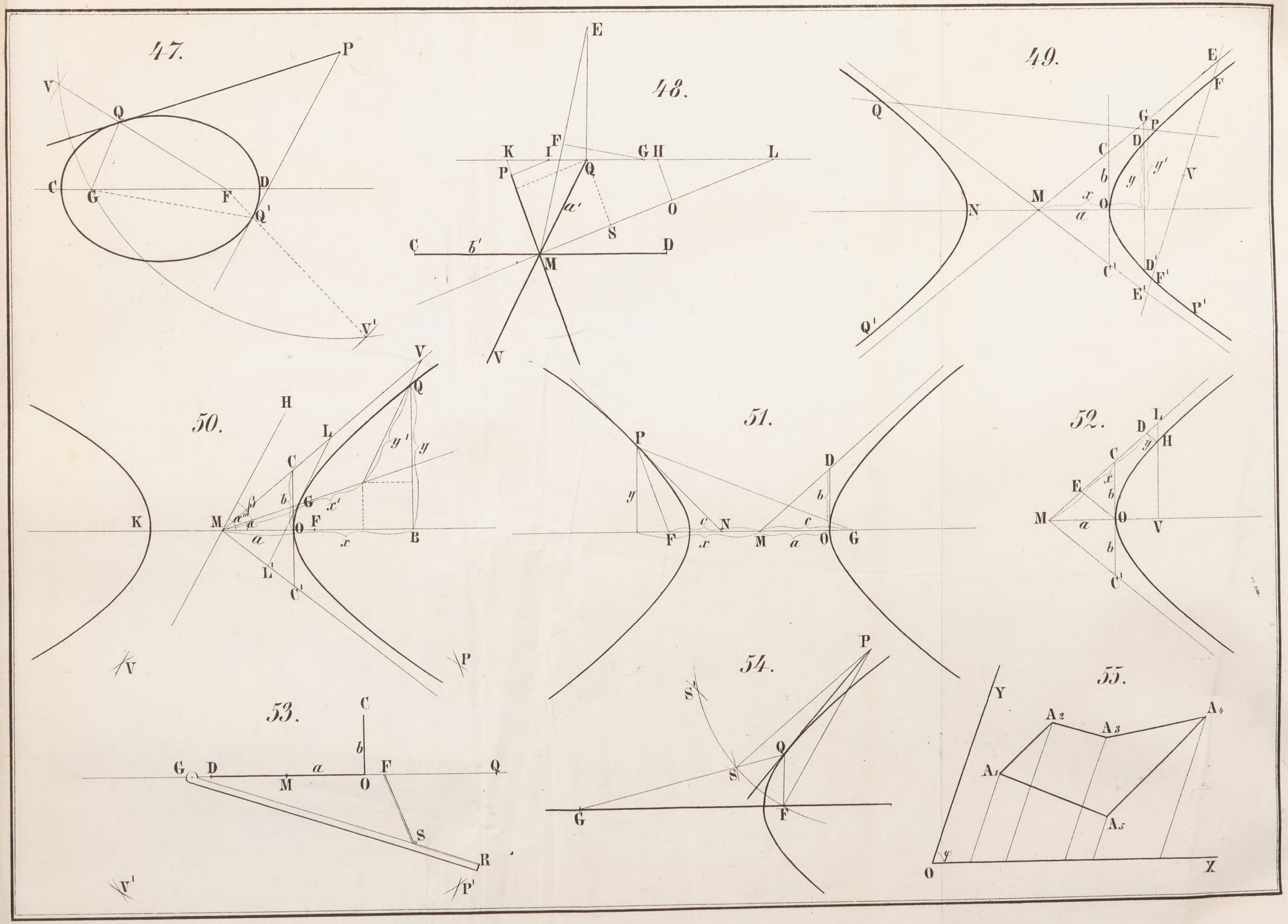

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
y=a x+b
y=a'' x+b''
y=a' x+b'

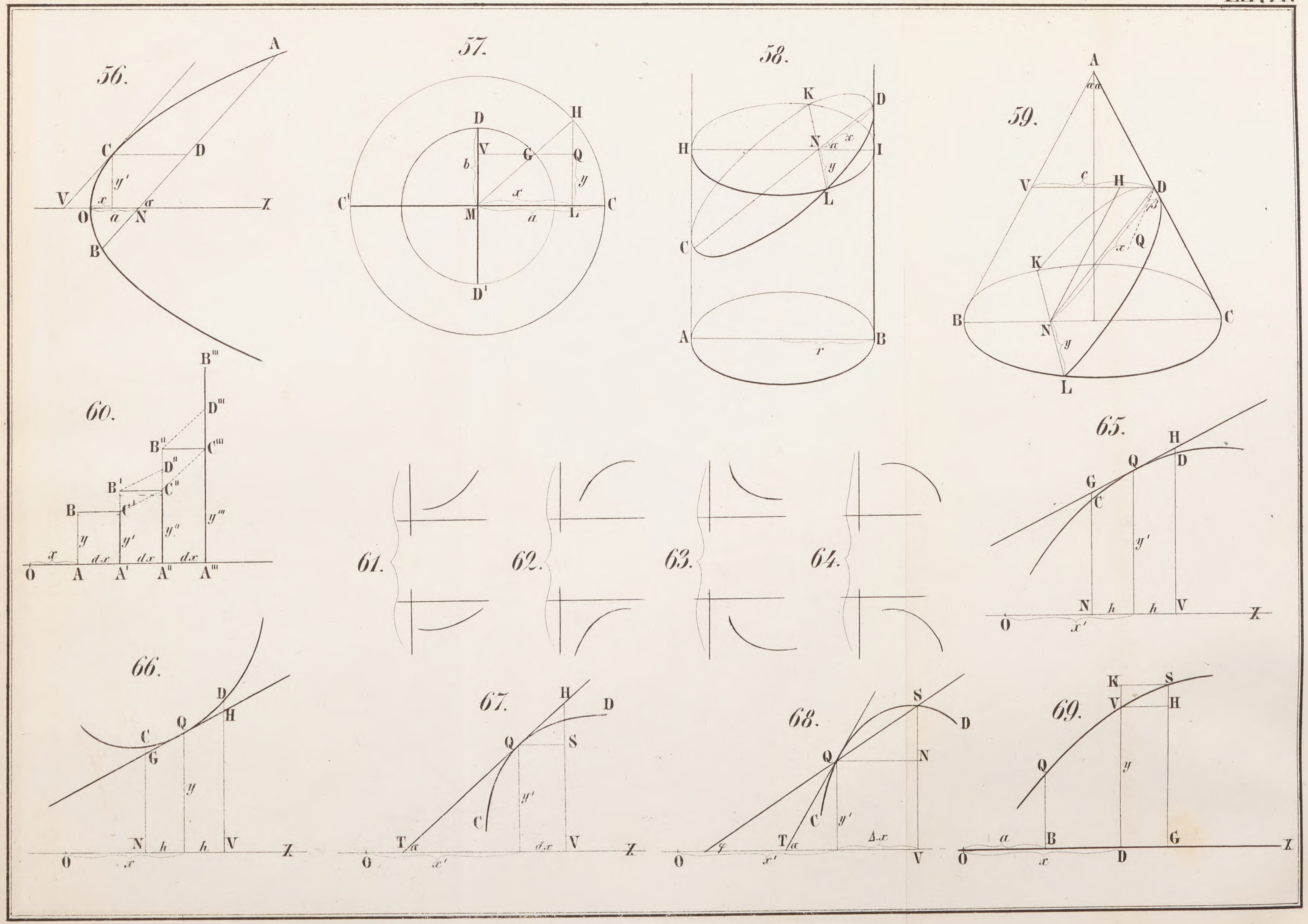


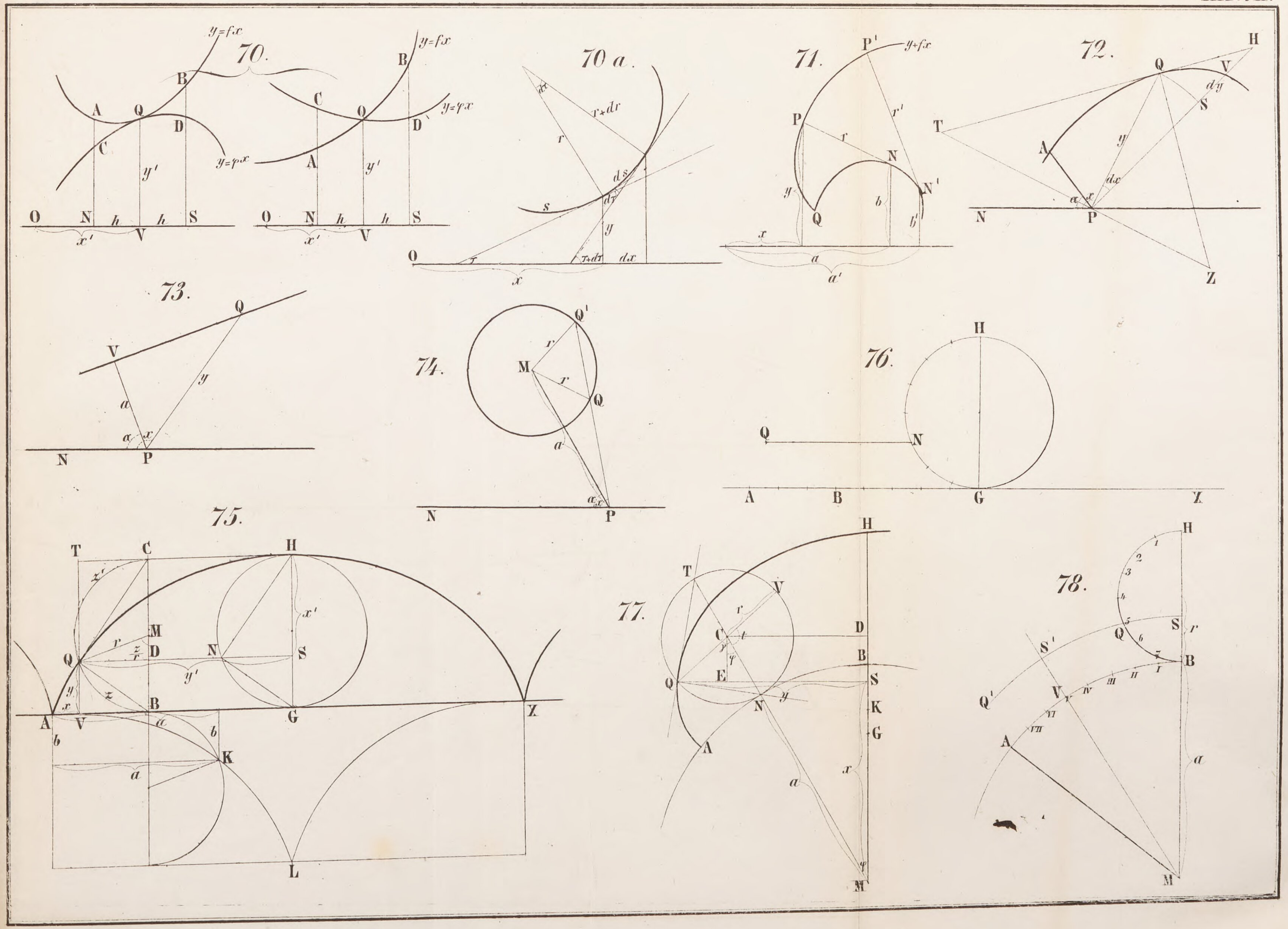
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.


24.
25.
28.
29.
30.
31.
26.
27.
32.
33.

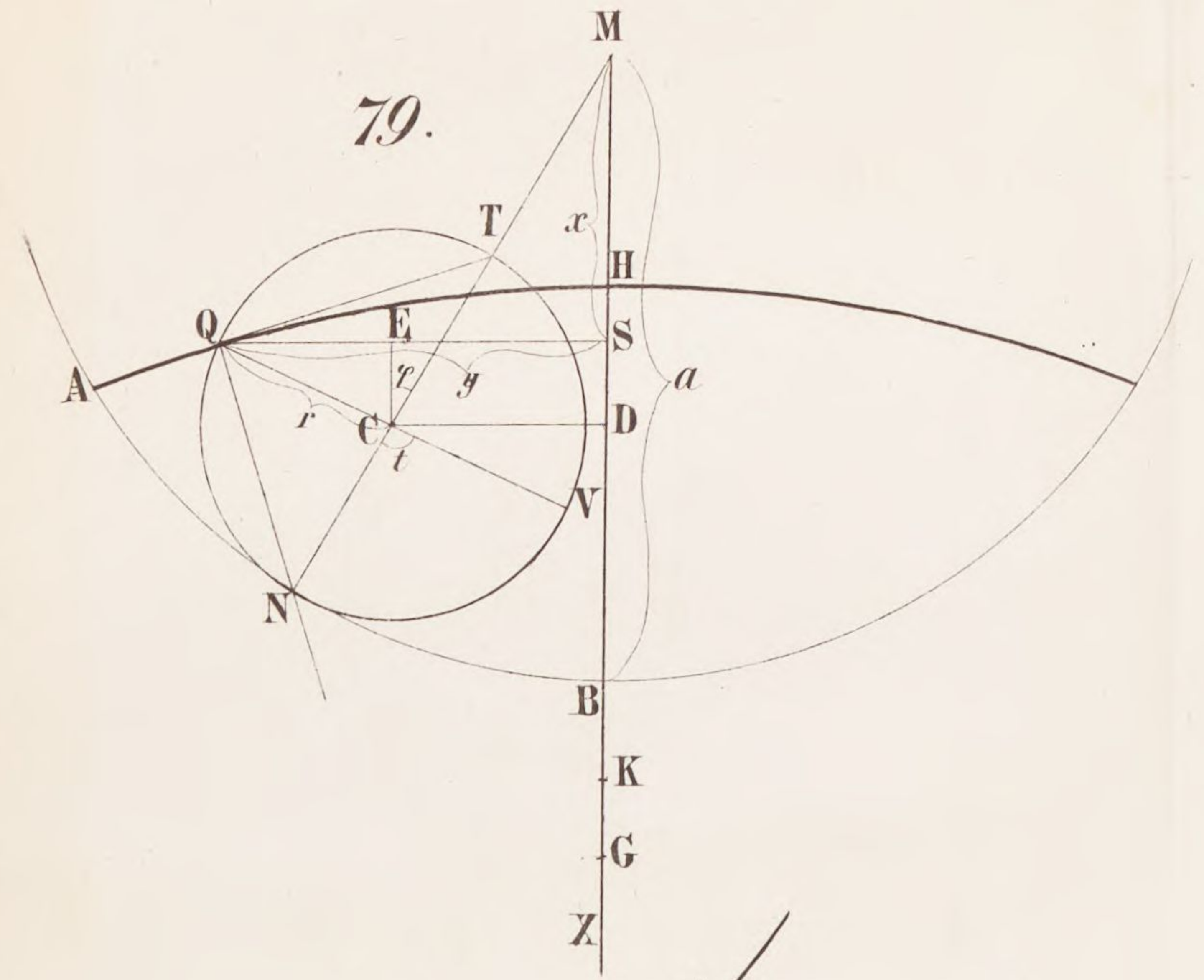

34.
C O a M z z N Z D
35.
C' P' C P y' G M x' K S H Q
38.
P H G V B Q C A M N D
39.
N Q H C V B G P M A D
36.
G' K P y' y G C α' M x x' D H L H'
37.
V Q G G' b a' y' x' D K M C H H' E
40.
C P Q y A G M x K V F B
42.
V C P G F D M Q S E V' C' P'
45.
V P b y M D H G x Q a C S
41.
P' P y' y C x Q D
43.
P y D x S 2a E z Q 2b P' V N
44.
C 2γ a-b/2 a+b/2 a-b/2 M D Q x y P
46.
S P Q C M D


47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.

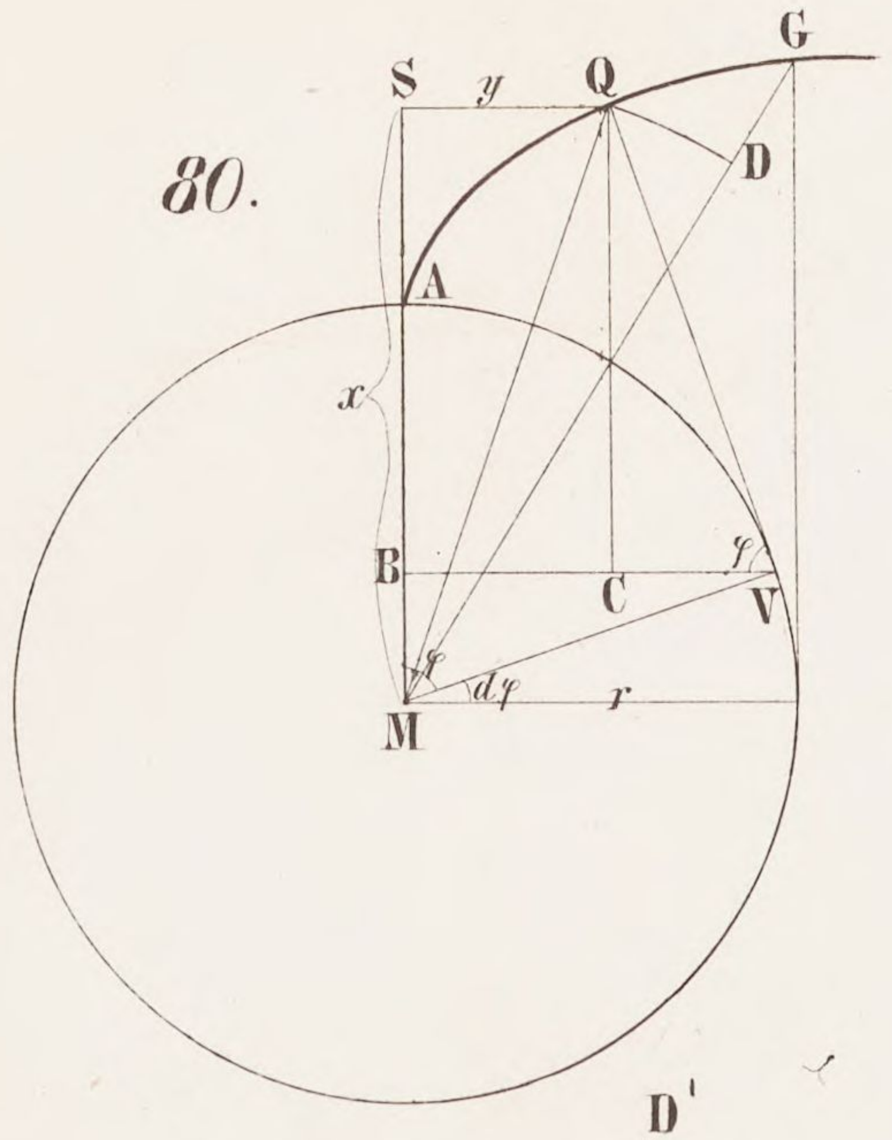

56.
A
C
D
V
O
a
N
B
X
y'
x
α
57.
D
H
V
G
Q
b
y
x
C'
M
a
L
C
D'
58.
K
D
H
N
I
x
y
α
L
C
A
B
r
59.
A
α α
V
c
H
D
β
Q
x
K
B
N
C
y
L
60.
B'''
D'''
B''
C'''
D''
B'
C''
B
C'
y
y'
y''
y'''
x
dx
O
A
A'
A''
A'''
61.
62.
63.
64.
65.
H
Q
D
G
C
y'
N
h
V
O
x'
X
66.
D
Q
H
C
G
y
N
h
V
O
x
X
67.
H
D
Q
S
y'
C
T
α
dx
V
O
x'
X
68.
S
D
Q
N
C
y'
T
α
φ
Δx
O
x'
V
69.
K
S
V
H
Q
y
a
B
G
O
x
D
X


70.
70 a.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.

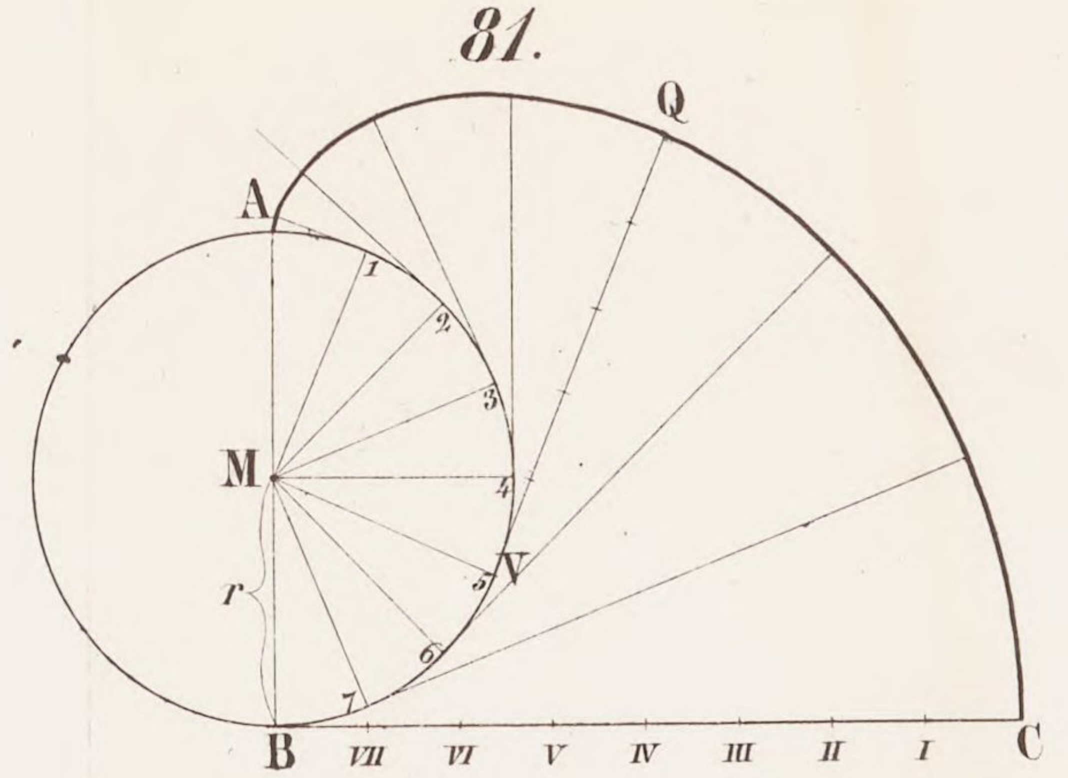
79.



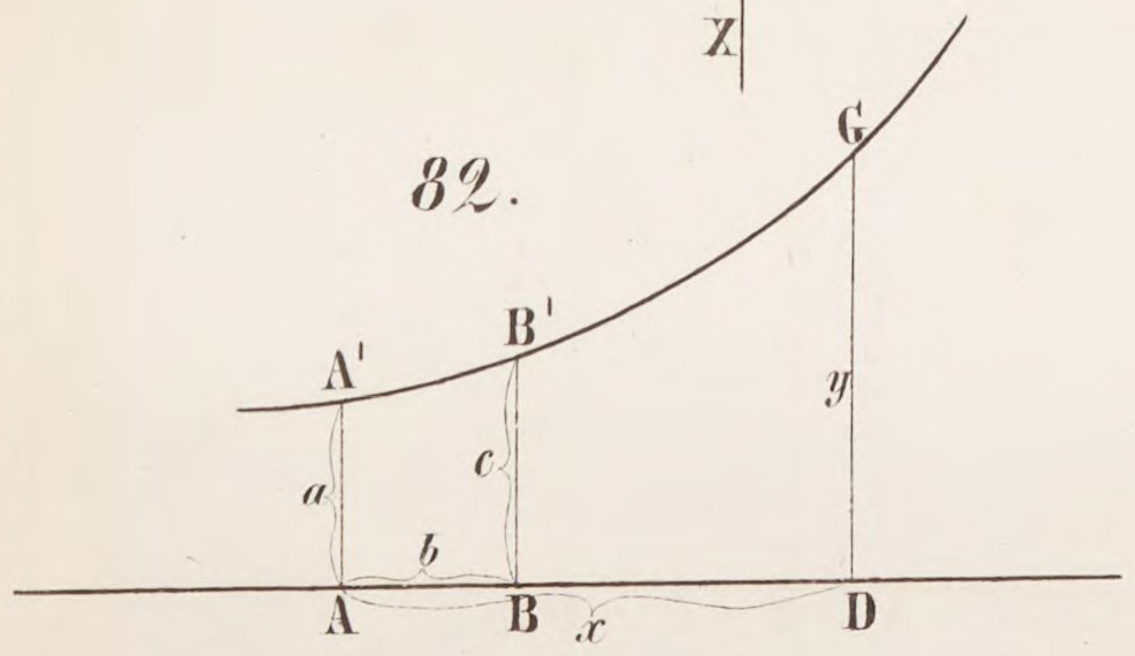
80.



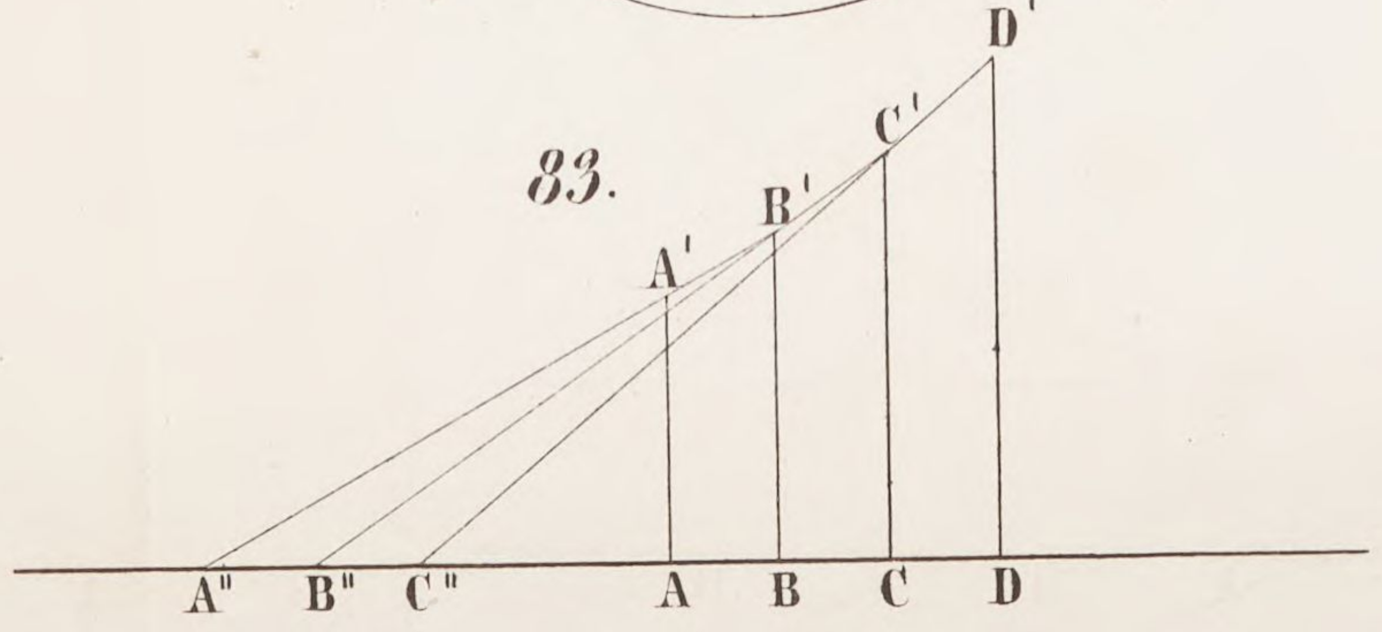
81.



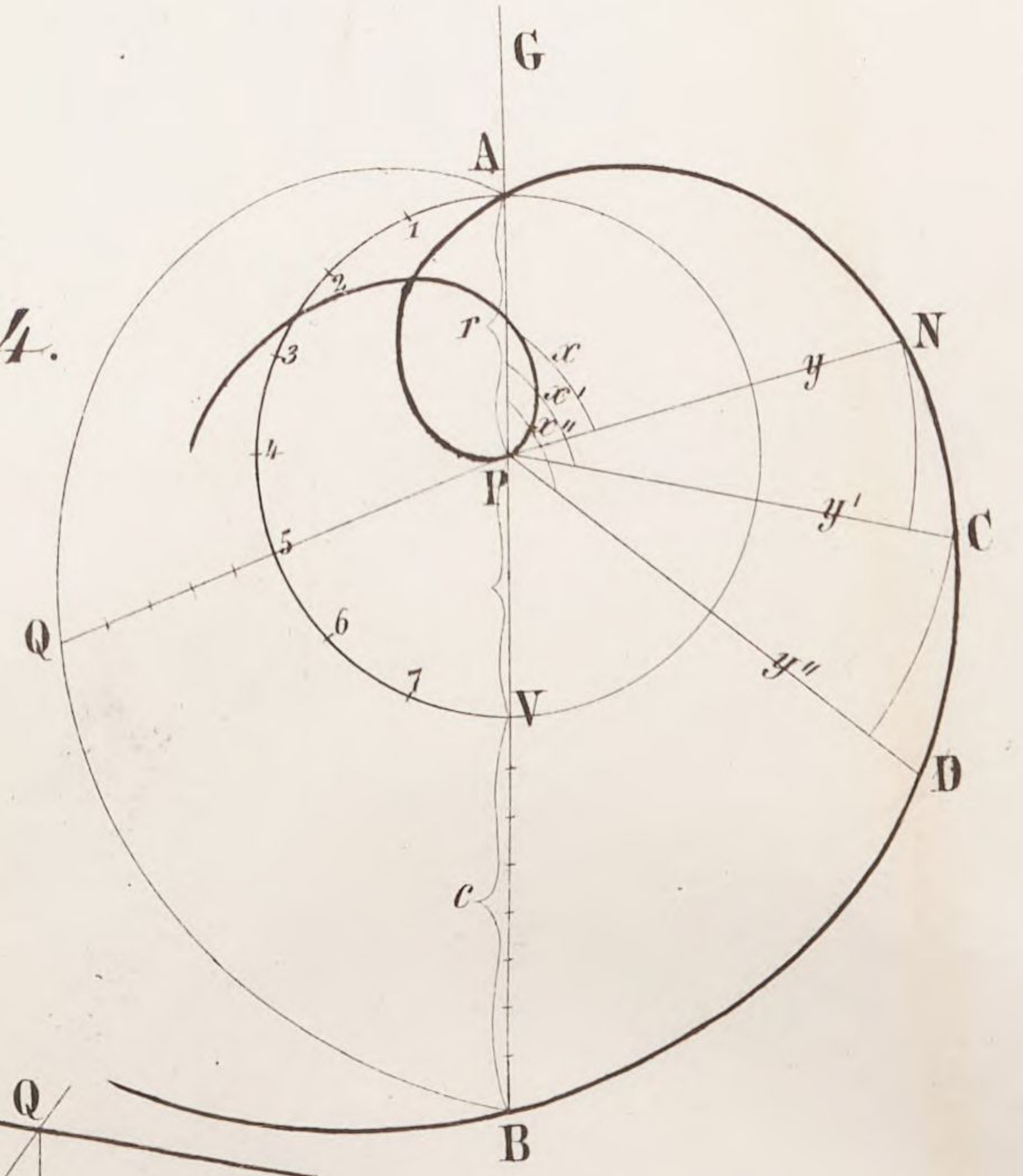
82.



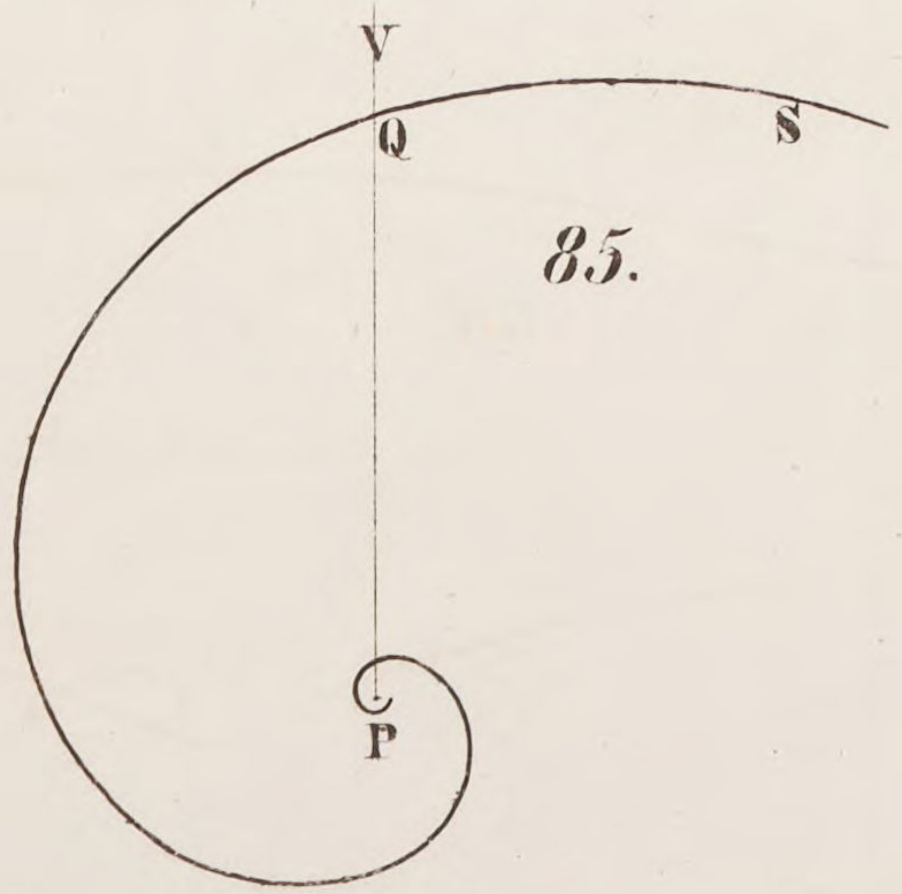
83.



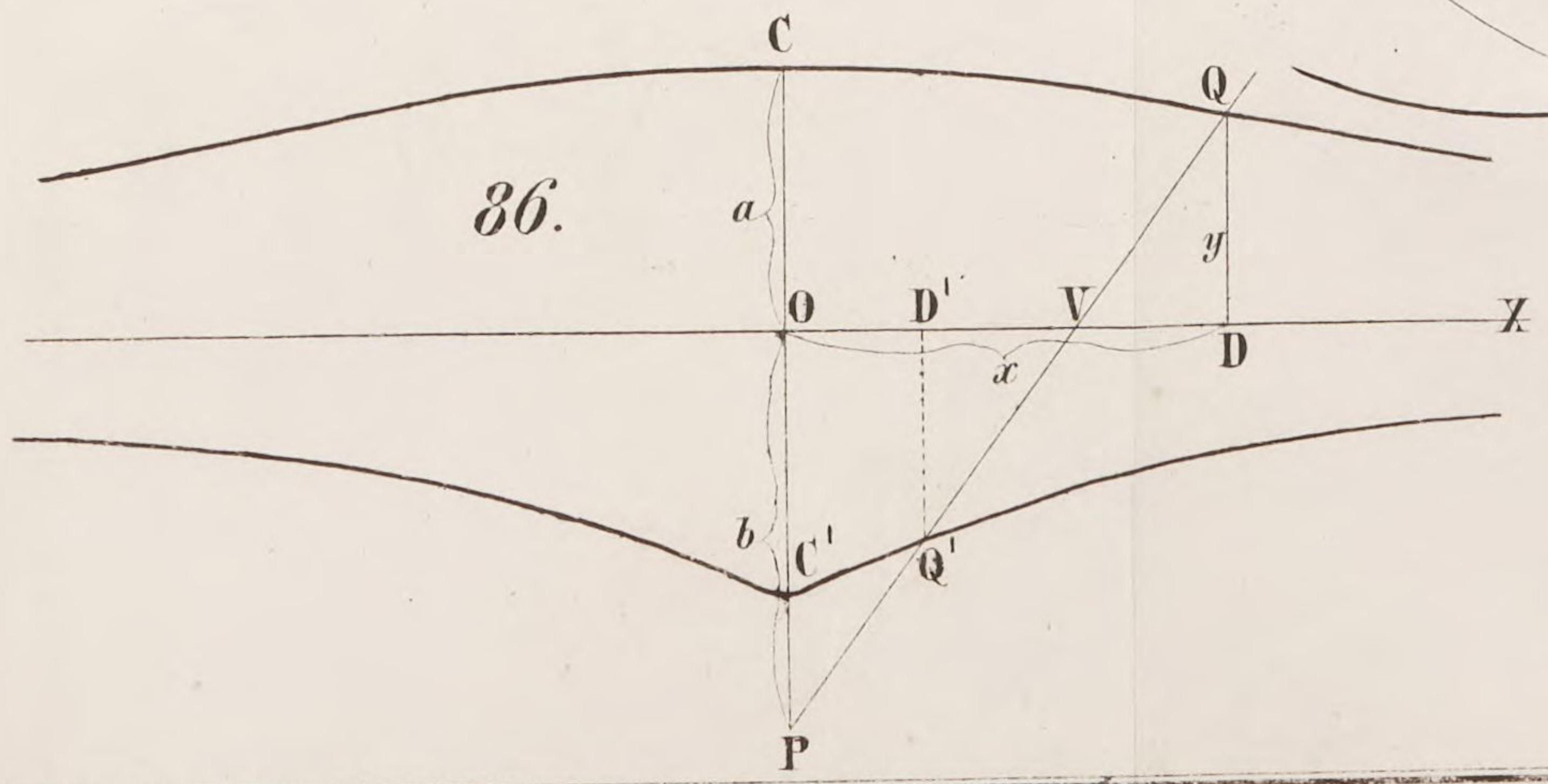
84.



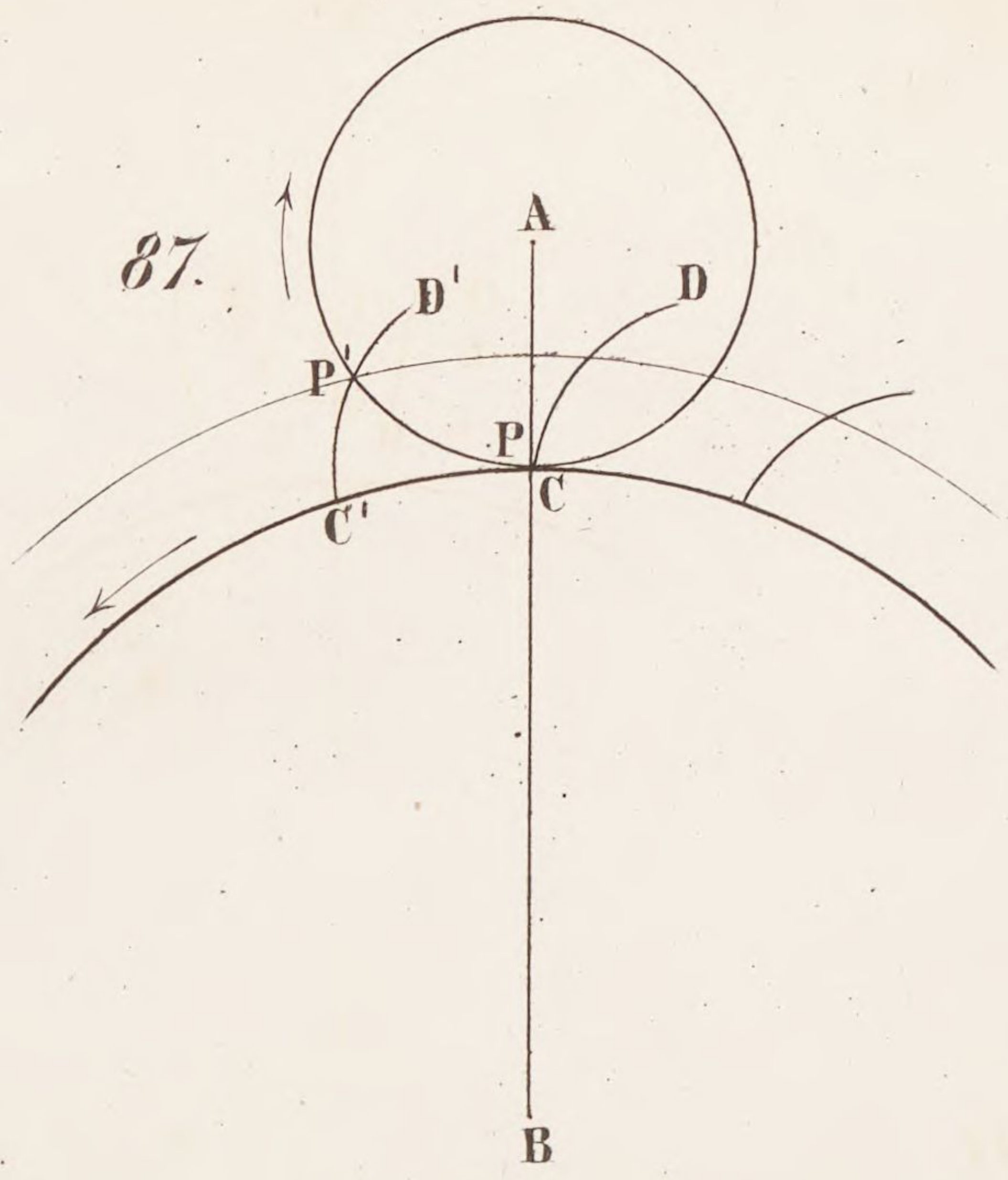
85.



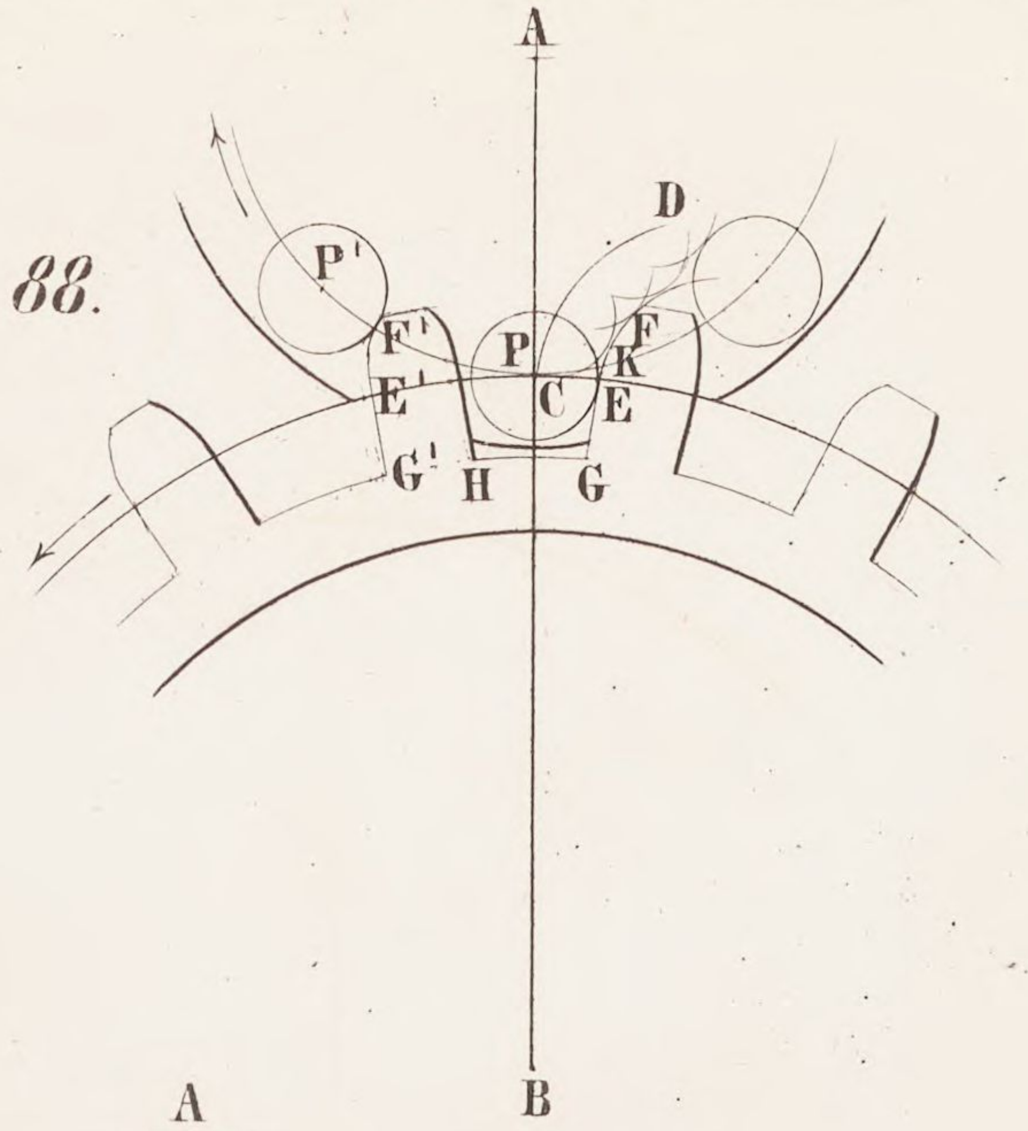
86.



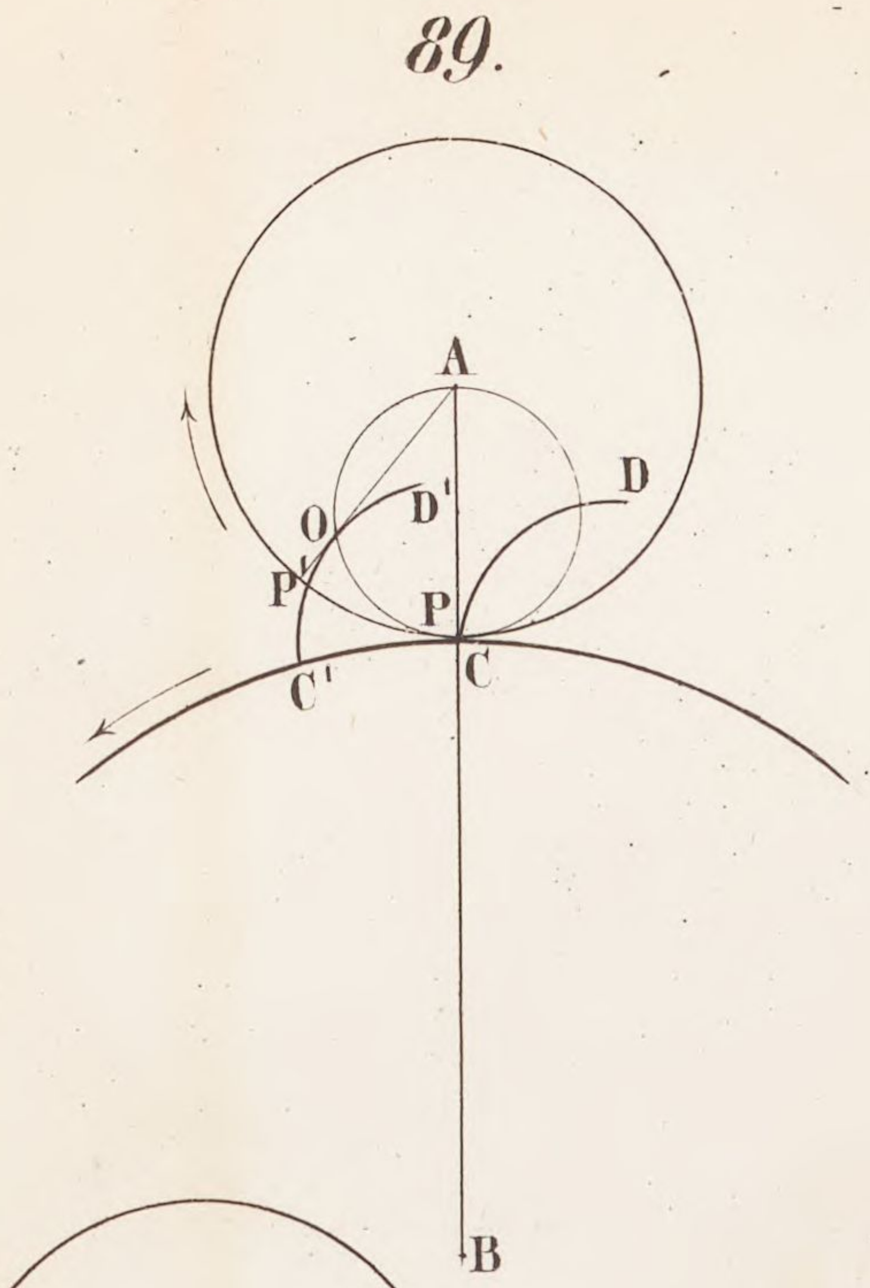
87.



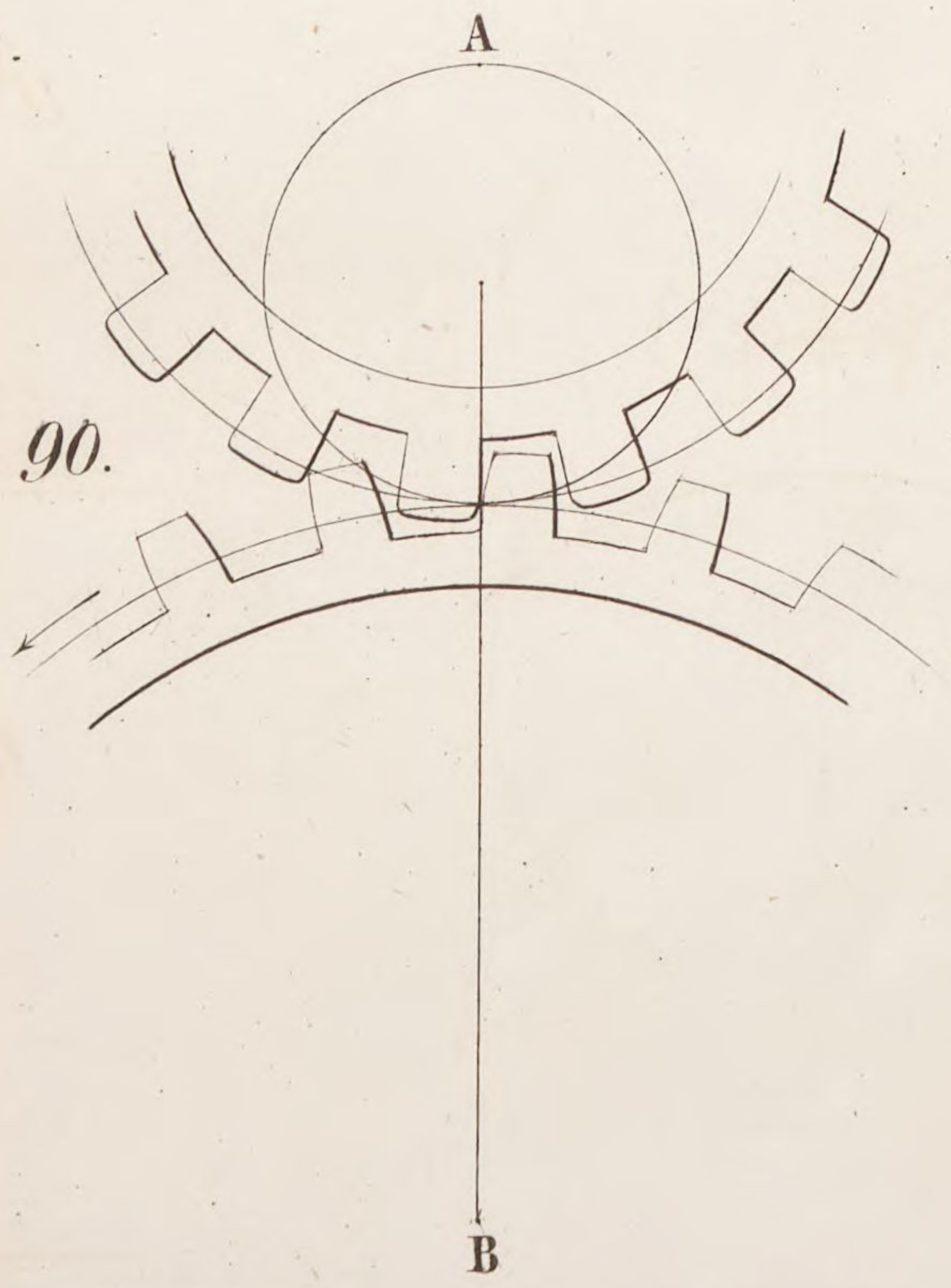
88.



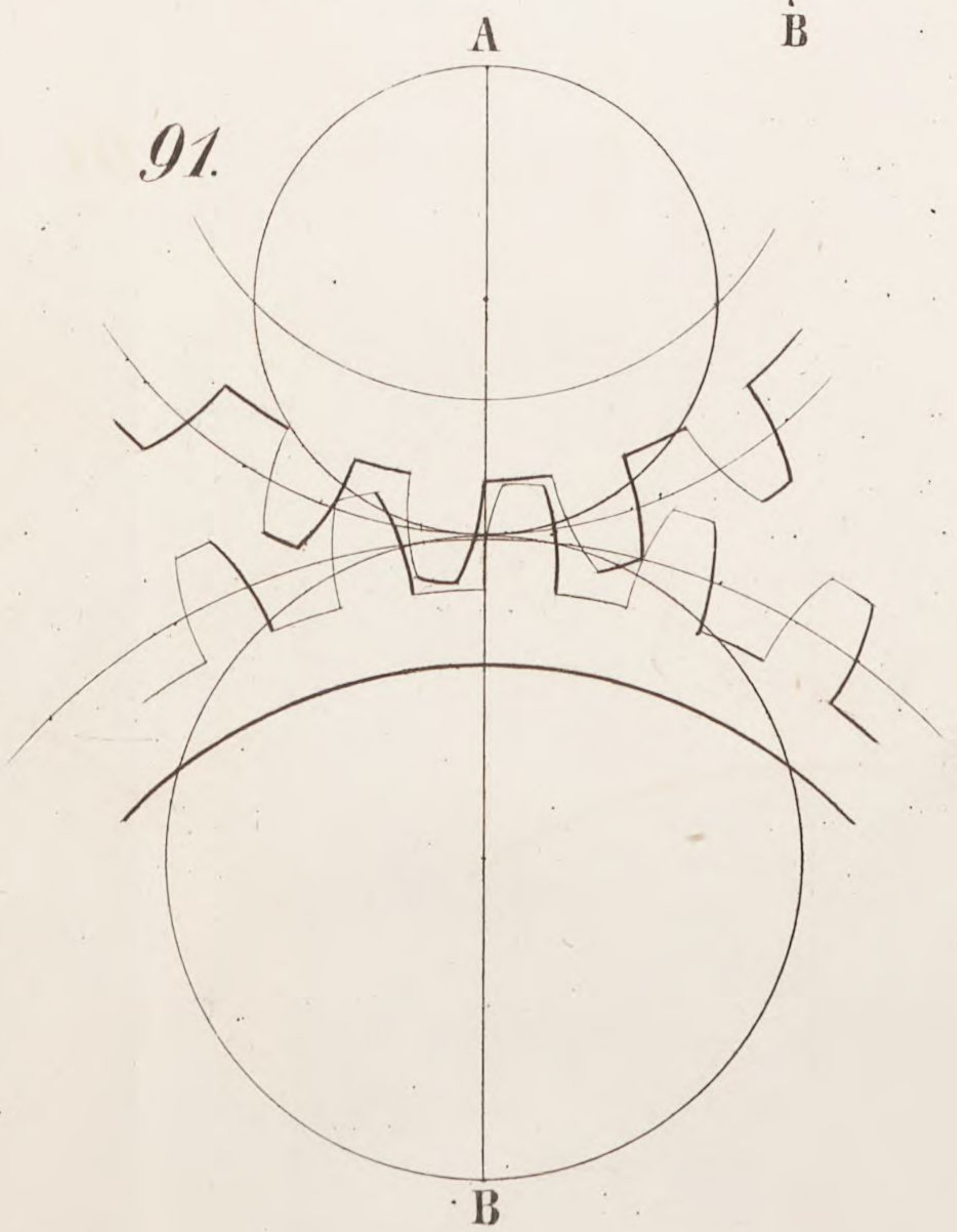
89.



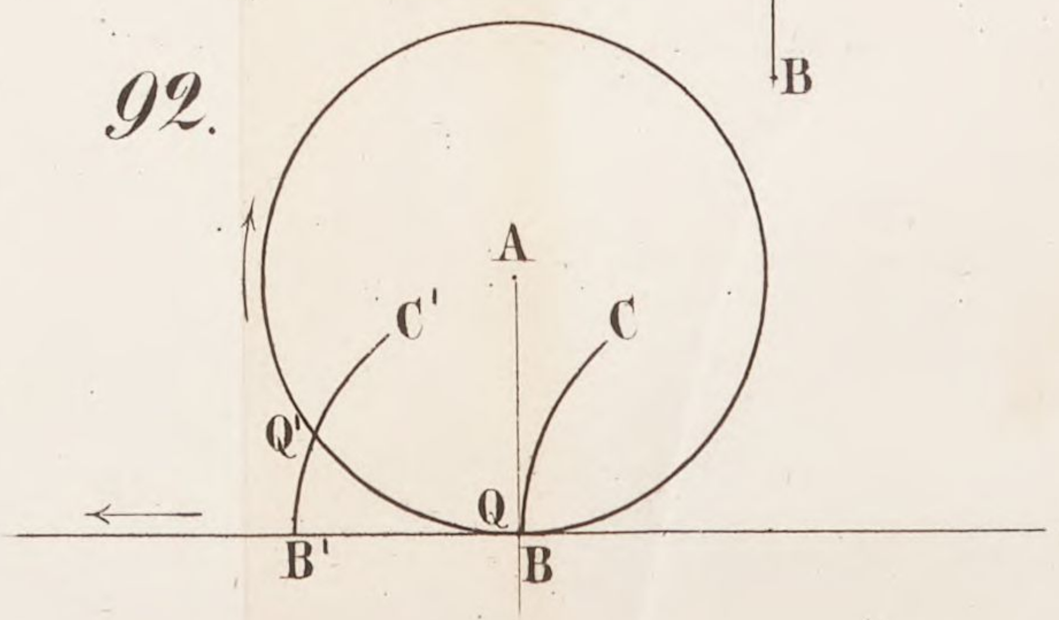
90.



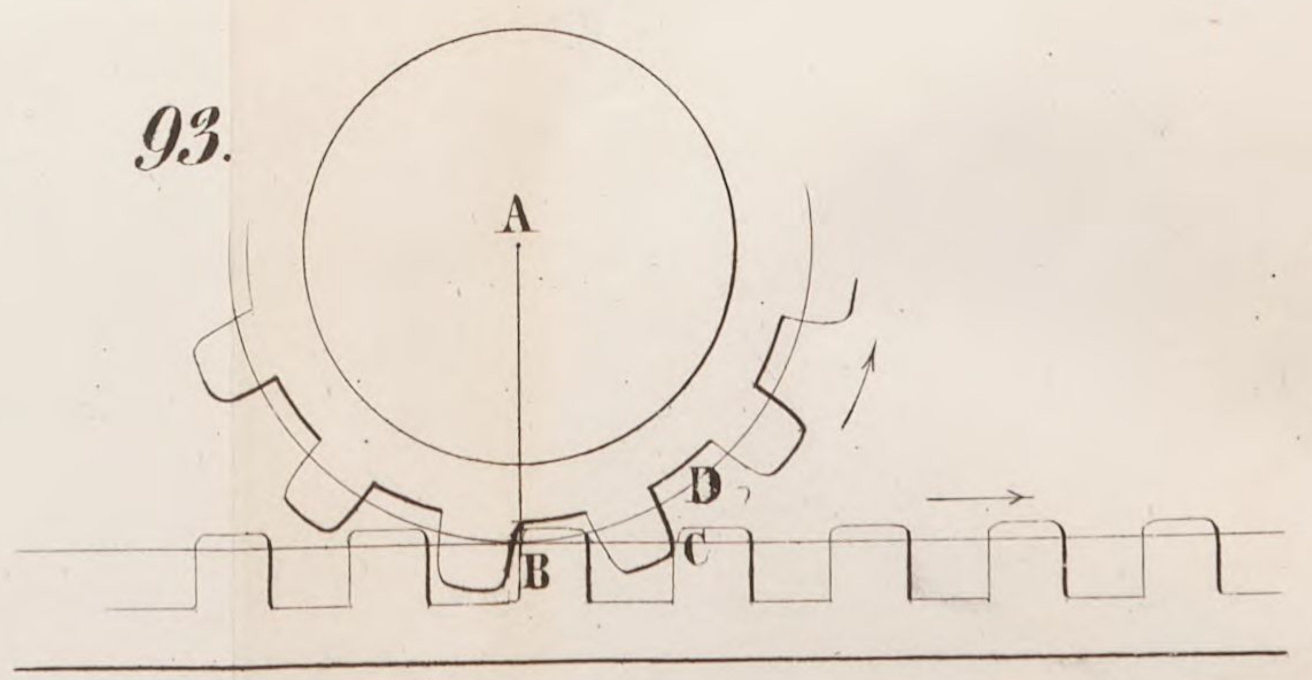
91.



92.



93.



C. G. Herwig, lithe.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolff, Ferdinand

Lehrbuch der Geometrie Als Leitfaden für den Unterricht am Königl. Gewerb-Institut

Bd.: 3

1845

Coburg, Landesbibliothek -- E I 4/81
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942506-4